II Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
II EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
26 e 27 de Outubro de 2017

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS

LUCAS MENDES[1], ANDREIA R. S. SALDANHA[2]

[1] Graduando em Tecnologia EM Manutenção De Aeronaves, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus São Carlos, lucasmendes97@hotmail.com, filho de Adriana Cristina Machado Melo e Marcio de Faria.
[2] Docente do IFSP, Câmpus São Carlos, asimoni@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.02.04-3 Equações Diferenciais Ordinárias

RESUMO: Um sistema mecânico pode ser modelado por uma ou mais equações diferenciais e o estudo e entendimento dessas equações são essenciais para o completo conhecimento das características e controle desses sistemas. Este trabalho tem como objetivo a elaboração e simulação de modelos matemáticos de sistemas mecânicos visando despertar no estudante do curso de tecnologia o interesse pelos conceitos matemáticos que regem esses sistemas levando-o a um melhor domínio das equações envolvidas. Inicialmente será feito o estudo das equações diferencias de 1ª e 2ª ordem e suas possíveis soluções analíticas e numéricas, em seguida será modelado um sistema mecânico massa-mola-amortecedor e rotinas serão construídas para simulação do sistema

PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais; Vibrações mecânicas; Simulação; Sistemas Dinâmicos.

INTRODUÇÃO

Um modelo matemático pode ser entendido como uma equação ou um conjunto de equações que representa a dinâmica de um sistema de forma precisa ou bastante razoável. Esse modelo pode não ser único, ou seja, é possível representar o mesmo sistema de diferentes formas.

Para obter um modelo matemático é necessário que se conheça o sistema a ser modelado e as variáveis envolvidas, de forma que se possa compreender e controlar o sistema. Segundo NISE (2002), a principal dificuldade de se obter um modelo matemático de sistemas reais está no fato de que o pesquisador necessita de conhecimentos sólidos em áreas como matemática e física, além de um forte caráter investigativo, pois para construção do modelo são exigidos fatores como investigação do sistema físico, percepção e formulação das hipóteses e capacidade para efetuar as simplificações e linearizações necessárias e também capacidade para interpretar o resultado obtido afim de validar ou não o modelo.

No estudo de um modelo matemático é importante seguir os passos: definir e compreender o sistema que se pretende modelar, analisar e formular as hipóteses a serem consideradas, efetuar linearizações que se mostrarem necessárias, equacionar o modelo, solucionar as equações, examinar e validar a solução, aceitar ou não o modelo obtido.

Neste trabalho foi construído e analisado o modelo mecânico para um sistema massa-mola-amortecedor, determinando as equações matemáticas envolvidas na modelagem do sistema, resolvendo as equações para diferentes casos e analisando as respostas obtidas, construindo rotinas e gráficos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para desenvolvimento do levantamento bibliográfico será necessário que o aluno e o docente tenham acesso ao acervo da biblioteca e a algumas bases de periódicos e teses da Capes, o que está disponível no IFSP. Para desenvolvimento das equações e simulações serão utilizados computadores de uso pessoal e de propriedade do aluno e do docente, que deverão ter instalados softwares preferencialmente de código livre onde seja possível criar as rotinas, como, por exemplo, o Scilab. Não será necessário dispor de recursos para compra de computadores, nem para o desenvolvimento do projeto.

METODOLOGIA

Para o estudo das equações foram utilizados livros e artigos sobre o tema disponíveis na biblioteca do câmpus e também em s*ites* de revistas especializadas. Para as simulações foi utilizado o *software* de código livre Scilab, instalado nos computadores de uso pessoal de propriedade do aluno e do docente e também nos computadores do Laboratório de Informática do câmpus,

Modelo de equação:

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F(t) \qquad (1)$$

em que,

m – massa

k – constante da mola

γ - constante de amortecimento

RESULTADOS E DISCUSSÃO

As equações lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos importantes como as oscilações mecânica e elétricas.

Suponha que uma massa *m* está atada a uma mola flexível suspensa por um suporte rígido. Quando trocamos a massa, o alongamento da mola será obviamente diferente. Pela lei de Hooke a mola exerce uma força restauradora **F** oposta a direção do alongamento proporcional a distinção *x*.

Essa relação é enunciada na forma $F = k \times x$, onde a constante de proporcionalidade *k* é chamada constante de mola.

A equação diferencial que modela o sistema é

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F(t) \qquad (1)$$

em que,

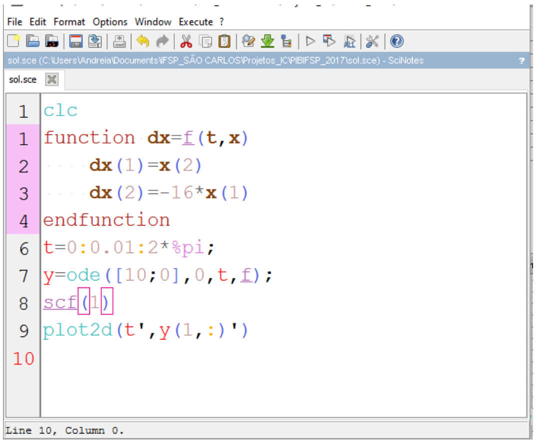
m – massa

k – constante da mola

γ - constante de amortecimento

O sistema pode ser livre, amortecido ou forçado, dependendo das constantes que atuam na equação e a falta de domínio sobre as respostas desses sistemas pode provocar acidentes como os que ocorreram em 1959 e 1960 quando dois aviões comerciais caíram em virtude dos efeitos destrutivos de grandes oscilações mecânicas.

Para analisar a resposta, foi construída uma rotina com o *software* Scilab para solução e apresentação do gráfico que representa o movimento. A Figura 1 apresenta a rotina criada.



```
clc
function dx=f(t,x)
    dx(1)=x(2)
    dx(2)=-16*x(1)
endfunction
t=0:0.01:2*%pi;
y=ode([10;0],0,t,f);
scf(1)
plot2d(t',y(1,:)')
```

Figura 1: Rotina de solução e construção do gráfico da EDO.

A Figura 2 apresenta a resposta de um sistema livre e sem amortecimento representado pelo problema de valor inicial:

$$x''(t)+16x(t)=0\,,\ \ x(0)=10\,,\ \ x'(0)=0 \quad (2)$$

em que

$x(t)$ – deslocamento da mola

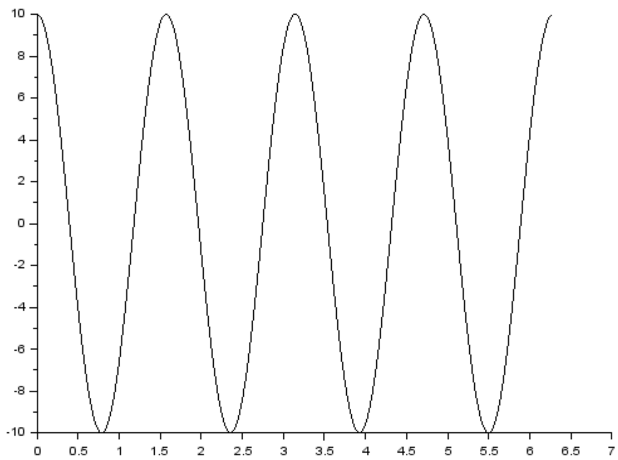


Figura 2: Vibração livre sem amortecimento

Nas Figuras 3 e 4 são apresentados os gráficos de sistemas amortecidos, sendo que na Figura 3 o gráfico representa um sistema livre superamortecido, neste caso a equação característica apresenta duas raízes reais distinatas e na Figura 4 o sistema é subamortecido e, neste caso, a equação característica apresenta uma raiz real.

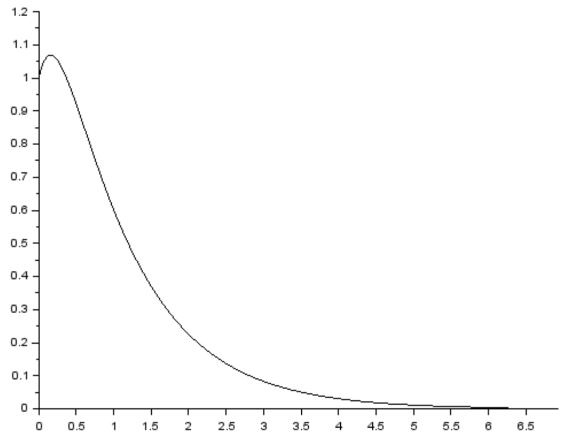


Figura 3: Sistema superamortecido

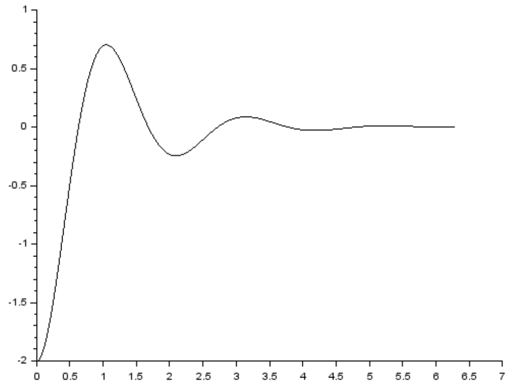


Figura 4: Sistema subamortecido

O sistema forçado com amortecimento representado pelo problema de valor inicial:

$$\frac{1}{5}x''(t)+1.2x'(t)+2x=5\cos(4t)\ ,\ x(0)=\frac{1}{2},\ x'(0)=0$$

apresenta uma resposta uma resposta periódica representada pelo gráfico da Figura 6.

A massa parte do repouso 0.5 metro abaixo da posição de equilíbrio. O movimento é amortecido e está sob a ação de uma força externa periódica. Enquanto a força externa estiver atuando o sistema vai continuar em movimento.

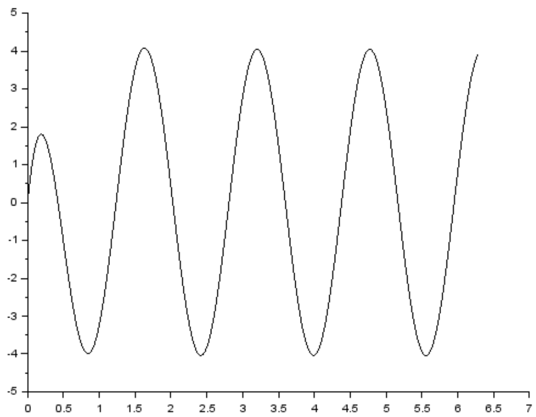


Figura 6: Sistema forçado

CONCLUSÕES

A análise de vibrações tem fundamental importância para as mais diversas áreas. A análise de vibrações pode ajudar na manutenção preditiva de máquinas, construção de grandes obras de engenharia civil, estudos de resistência de materiais e nas mais diversas áreas.

As rotinas construídas e os gráficos apresentados nos permitem analisar as possíveis respostas das vibrações tendo maior controle sobre as oscilações

Até o momento foram construídas as rotinas e apresentados os gráficos dos diferentes problemas de vibrações mecânicas.

Dando continuidade será estudado um caso prático de dois acidentes aeronáuticos ocorridos em 1959 e 1960, onde duas aeronaves despencaram do céu por conta de ressonância. A vibração que o motor as hélices faziam passavam para a caixa do motor que passava para a asa do avião, ocasionando a quebra da asa quando atingia a frequência máxima de vibração da asa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o apoio que o instituto me deu com a ajuda financeira.

REFERÊNCIAS

BRANNAN, J. R.; BOYCE, W. E.; Equações Diferenciais, Uma Introdução a Métodos Modernos e Suas Aplicações. Rio de janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1ª edição, 2008.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H.; Sistemas de Controle Modernos. Rio de janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 8ª edição, 2001.

FOGAL, Marcelo Luiz Freitas; OLIVEIRA, Ernandes Rocha de. Artigo científico: Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, Revista Virtual de Iniciação Acadêmica da UFPA, Vol 1, No 1, março 2001. Disponível em: http://www.cultura.ufpa.br/rcientifica/ed_anteriores/pdf/ed_01_amsl.pdf. Acesso em 03 de julho de 2017

NISE, N. S.; Engenharia de Sistemas de Controle. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

OGATA, K.; Engenharia de controle moderno. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 4ª edição, 2003.

PEGOLLO, C.; Modelos Matemáticos em Engenharia: motivando a pesquisa e a integração. Integração (São Paulo), São Paulo, v. Ano XI, n.41, p. 153-158, 2004.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R.; Equações Diferenciais. São Paulo: Makron Books, Vol 1, 3ª edição, 2001.