II Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
II EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
26 e 27 de Outubro de 2017

LÓGICA FUZZY APLICADA A UM MODELO EPIDEMIOLÓGICO

JULIANA GOUVEA MITTITIER[1], LEANDRO JOSÉ ELIAS[2]

[1] Graduanda em Licenciatura em Matemática, IFSP Campus Araraquara, julianamittitier@gmail.com
[2] Docente da Área de Ciências e Matemática, IFSP Campus Araraquara, leandro.elias@ifsp.edu.br

Área de conhecimento: Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

RESUMO: O objetivo deste trabalho é realizar a representação fuzzy de um sistema de equações diferenciais não lineares obtido a partir de um modelo epidemiológico. Tais modelos são utilizados para representar a disseminação de doenças e a análise matemática desses modelos podem influenciar políticas públicas no controle das mesmas. Em geral, sistemas de equações não lineares não admitem soluções analíticas e requerem diferentes procedimentos para análise, tais como a representação fuzzy Takagi Sugeno (TS) realizada neste trabalho. Desse modo, foram utilizados trabalhos na área de engenharia que realizam estudos de sistemas não lineares a partir de modelos fuzzy TS e como exemplo para utilizar esta ferramenta, foi tomado um modelo epidemiológico. Após simulação numérica com o MATLAB, verificou-se que o resultado obtido representou o modelo de equações original como esperado. A partir desse resultado novos estudos de análise e controle do modelo abordado poderão ser realizados.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diferenciais; Modelos Epidemiológicos; Modelos Fuzzy Takagi Sugeno; Sistemas Dinâmicos; Sistemas Não Lineares.

INTRODUÇÃO

A história da sociedade é marcada por diversas preocupações humanas na busca pela sobrevivência, clima, epidemias, guerras e predadores. Atualmente a epidemia de dengue é um dos principais problemas de saúde pública no mundo. Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), cerca de 80 milhões de pessoas se infectam anualmente. Através da epidemiologia matemática (Anderson e May, 1992), os efeitos agregados são passíveis de serem controlados e permite uma aproximação da realidade complexa e dinâmica dos sistemas vivos, e da estrutura dos processos de propagação de epidemias por meio de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais.

Uma abordagem muito utilizada para representar modelos epidemiológicos é na forma de compartimentos que possibilitam descrever a epidemia como um sistema de equações diferenciais. Um exemplo de modelo compartimental é quando dividimos a população em três grupos, que são: os suscetíveis, infectados e recuperados (SIR); e o ponto principal é determinar se a doença vai se espalhar ou não. Esse modelo amplamente empregado é conhecido como modelo SIR (Kermack e McKendrick, 1927).

Nessa perspectiva, o modelo matemático que descreve a evolução da dengue na cidade de Araraquara, considera o número de humanos infectados semanalmente em 2015 e 2016 e é baseado em equações diferenciais não lineares. Esse estudo já foi iniciado e apresentado no I EnICT entitulado “Modelo matemático aplicado a epidemiologia de dengue” (Mittitier e Tavoni, 2016) e agora com o intuito de realizar uma análise e até mesmo estudo de controle da disseminação na doença, será feita uma linearização no modelo estudado anteriormente baseada nos modelos Fuzzy TS (Tanaka e Wang, 2001).

O intuito deste trabalho é obter os modelos locais do sistema fuzzy para futuramente realizar estudos da teoria de análise e controle das equações não lineares. Na literatura podem ser verificadas diversas aplicações para o modelo fuzzy obtido, tais como o estudo de desigualdades matriciais, do inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs) facilitando a inclusão de incertezas paramétricas no modelo usando o conceito de convexidade. (Elias et al., 2016). A seguir são apresentados os modelos locais obtidos para o sistema não linear e são realizadas algumas simulações numéricas no MATLAB para verificar a equivalência do sistema original com o sistema linearizado pelo método proposto nesse trabalho.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O sistema de equações diferenciais a seguir representa o modelo SIR com taxas vitais (Troyo, 2013), que considera a população constante, isto é, as taxas de nascimento e morte são iguais no tempo. Este modelo será utilizado como exemplo para a aplicação do modelo Fuzzy Takagi Sugeno.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu(N-S) - \frac{S\beta I}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{S\beta I}{N} - I(\mu+\gamma) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{1}$$

com $N = S + R + I$ em que,

β – taxa de infecção
μ – taxa de mortalidade
γ – taxa de recuperados
S – suscetíveis: indivíduos que podem contrair a doença
I – infectados: indivíduos que podem transmitir a doença
R – recuperados: indivíduos que se recuperam da doença e não estão sujeitos a uma nova contaminação.

O modelo fuzzy proposto por Takagi e Sugeno é descrito por regras Fuzzy Se-Então que representam relações de entrada-saída lineares locais de um sistema não-linear. A característica principal do modelo fuzzy Takagi-Sugeno é expressar a dinâmica local de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. (Tanaka e Wang, 2001).

> A ideia de descrever um sistema não-linear , como a combinação de um determinado número de modelos locais lineares que não variam no tempo, descrevem o comportamento do sistema original em diferentes pontos do seu espaço de espaços. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy TS, consistindo apenas de um modelo local. (CARDIM et al.,2007, p.1)

Então, considerando um sistema não linear $\dot{x}(t) = f(x(t)); f(0) = 0.$ O objetivo é encontrar uma região global tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1, a_2]\, x(t)$. Isto garante a construção de um modelo fuzzy exato. Para isso, considera-se o seguinte sistema não linear na forma matricial

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\big(z(t)\big)x_j(t) \tag{2}$$

em que z e x_j são respectivamente as premissas e variáveis de estado. Para obter a representação exata do sistema não-linear acima, considera-se o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_p| \leq d_p\}, p \in I \subset \{1, \dots, n\}$ e são definidos:

$$a_{ij1} = \max_{z(t)}\{f_{ij}(z(t))\} \qquad a_{ij2} = \min_{z(t)}\{f_{ij}\big(z(t)\big)\}, i = 1, \dots, n.$$

O número de regras é dado por $r = 2^s$, em que s é o número de não linearidades. As matrizes de modelos locais são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{111} & \cdots & a_{1n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & \cdots & a_{nn1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{111} & \cdots & a_{1n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & \cdots & a_{nn2} \end{bmatrix}, \dots A_r = \begin{bmatrix} a_{112} & \cdots & a_{1n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n12} & \cdots & a_{nn2} \end{bmatrix}$$

Define-se também

$h_{ij1}\big(z(t)\big) = \frac{f_{ij}z(t) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}$ $\qquad\qquad$ $h_{ij2}\big(z(t)\big) = 1 - \ h_{ij1z(t)}$

então, as funções de pertinência são dadas por:

$$h_1\big(z(t)\big) = h_{111} * \ldots * h_{1n1,}h_2\big(z(t)\big) = h_{111} * \ldots * h_{1n2}, \ldots \ , h_r\big(z(t)\big) = h_{112} * \ldots * h_{1n2}$$

Portanto, o sistema não linear (2) pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i\big(z(t)\big)A_i\big(x(t)\big)$$

sobre o conjunto D (Alves e Valentino, 2015).

METODOLOGIA

O sistema de equações diferenciais (1) foi reescrito na forma $\dot{x} = Ax$ onde $S = x_1, \ I = x_2, \ R = x_3$ são variáveis em relação ao tempo e β, μ e γ são parâmetros constantes determinados por dados experimentais. Assim, podemos considerar como a população total $N = 208\,662$ e $x_2 \in [0, 259]$ o intervalo de variação do número de infectados no período de 2015. Assim,

$z(t) = \frac{\beta}{N}x_2,$ $\qquad$ $max\, z(t) = \frac{\beta}{N}.259,$ $\qquad$ $min\, z(t) = 0$

Então temos as seguintes ponderações,

$h_2(t) = \frac{z(t) - mín\, z(t)}{máx\, z(t) - mínz(t)} = \frac{x_2}{259}$ $\qquad$ e $\qquad$ $h_1(t) = 1 - \frac{x_2}{259}$

Portanto temos o modelo local da forma

$$A = \frac{x_2}{259}\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{N}259 & \mu & \mu \\ \frac{\beta}{N}259 & -(\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix} + (1 - \frac{x_2}{259})\begin{pmatrix} 0 & \mu & \mu \\ 0 & -(\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix} \tag{3}$$

O interesse nessa modelagem é devido a possibilidade de analisar a estabilidade assintótica de alguns sistemas não lineares apenas verificando a factibilidade de um conjunto de desigualdades lineares matriciais (LMIs) com o auxílio do MATLAB.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a simulação numérica do sistema foi implementado um programa em MATLAB, com a condição inicial $(N - 10, 10, 0)^T$, onde o número inicial de humanos infectados considerado foi $x_2 = 10$. Na literatura pesquisada foram encontrados os valores para os parâmetros $\beta = 2{,}2$ e $\gamma = 1$ e $\mu = 0{,}1$ (Troyo, 2013) e também $\beta = 0{,}75$, $\gamma = 0{,}263$ e $\mu = 0{,}1$ (Santos, 2013). Esses valores também foram considerados na simulação realizada, sendo os primeiros utilizados na obtenção do gráfico à esquerda da Figura 1 e, para o gráfico à direita da Figura 1, os demais valores de parâmetros apresentados em Santos (Santos, 2013). Na Figura 1 verifica-se que as linhas representam o sistema (1), neste caso a simulação do sistema original, e as bolinhas o sistema (3), que é a simulação do sistema obtido a partir da representação fuzzy TS. Desse modo, a representação fuzzy do sistema TS é a mesma do que a obtida a partir da simulação do sistema original, mesmo após a variação dos parâmetros, como esperado.

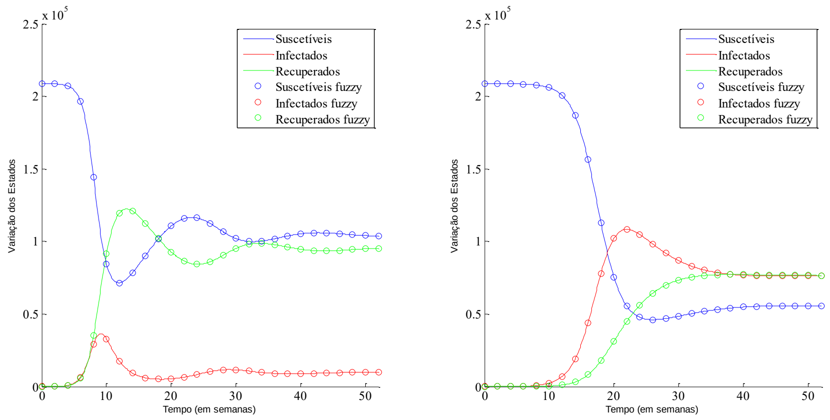

FIGURA 1. Simulação em MATLAB do Sistema (1).

CONCLUSÕES

Neste trabalho, a modelagem fuzzy TS representa exatamente o sistema não linear em um conjunto compacto. De acordo com o exemplo tomado pode-se concluir que ele foi eficaz na representação do modelo SIR analisado. A partir da representação do sistema fuzzy TS, outros estudos podem ser realizados para o modelo utilizado neste trabalho, tais como análise de estabilidade do sistema. Outro ponto importante a explorar é o estudo e elaboração de projetos de controles que utilizam LMIs, as quais podem ser resolvidas com o auxílio do MATLAB. Para isto, uma nova revisão bibliográfica deverá ser feita para encontrar modelos que considerem algum tipo de controle, como vacinas ou políticas de controle de crescimento da população do mosquito da dengue, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ALVES, W. L. L. e VALENTINO, M. C. **Análise de Estabilidade de Sistemas não lineares via função comum de Lyapunov Fuzzy**. IV Semana Acadêmica de Matemática da UTFPR-CP, 2015.

ANDERSON, R. M.; MAY, R. M. **Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control**. Oxford: Oxford University Press, 1992.

CARDIM, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Faria, F. A. and Covacic. M. R. **Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estados da planta.** In VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, pages 1-6, Florianópolis, SC, Brasil, 2007.

ELIAS, L.J., et al. **Controle de um Levitador Magnético com Atenuação de Disturbio**. Congresso Nacional de Matemática Aplicada, 2016.

KERMACK, W. and MCKENDRICK, A. **A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.** Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, A115: 700 – 721. 1927.

MITTITIER, J.G. and TAVONI, R. **Modelo matemático aplicado a epidemiologia de dengue.** I Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica, 2016.

SANTOS, D.A. **Modelagem de Transmissão de Dengue e Problemas Ambientais Similares Via Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias**. Tese de Mestrado, PPGCA/UESB, Bahia (abril 2013).

TANAKA, K. and WANG, H.O. **Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach,** New York: John Wiley and Sons, 2001.

TROYO, A.G. **Modelo SIR em rede e com parâmetro de infecção que depende periodicamente do tempo**. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (maio 2013).