III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS

LUCAS MENDES[1], ANDREIA R. S. SALDANHA[2]

[1] Graduando em Tecnologia EM Manutenção De Aeronaves, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus São Carlos, lucasmendes97@hotmail.com
[2] Docente do IFSP, Câmpus São Carlos, asimoni@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.02.04-3 Equações Diferenciais Ordinárias

RESUMO: Um sistema mecânico pode ser modelado por uma ou mais equações diferenciais. O estudo e entendimento dessas equações são essenciais para o conhecimento das características e controle desses sistemas. Este trabalho tem como objetivo a elaboração e simulação de modelos matemáticos de sistemas mecânicos visando despertar no estudante do curso de tecnologia o interesse pelos conceitos matemáticos que regem esses sistemas levando-o a um melhor domínio das equações envolvidas. Inicialmente será feito o estudo das equações diferencias de primeira e segunda ordem e suas possíveis soluções analíticas e numéricas. Em seguida será modelado um sistema mecânico massa-mola-amortecedor e rotinas serão construídas para simulação do sistema.

PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais; Vibrações mecânicas; Simulação; Sistemas Dinâmicos.

INTRODUÇÃO

Um modelo matemático pode ser entendido como uma equação ou um conjunto de equações que representa a dinâmica de um sistema de forma precisa ou bastante razoável. Esse modelo pode não ser único, ou seja, é possível representar o mesmo sistema de diferentes formas.

Para obter um modelo matemático é necessário que se conheça o sistema a ser modelado e as variáveis envolvidas, de forma que se possa compreender e controlar o sistema. Segundo (NISE, 2002) a principal dificuldade de se obter um modelo matemático de sistemas reais está no fato de que o pesquisador necessita de conhecimentos sólidos em áreas como matemática e física, além de um forte caráter investigativo, pois para construção do modelo são exigidos fatores como investigação do sistema físico, percepção e formulação das hipóteses e capacidade para efetuar as simplificações e linearizações necessárias e também capacidade para interpretar o resultado obtido afim de validar ou não o modelo.

No estudo de um modelo matemático é importante seguir os passos: definir e compreender o sistema que se pretende modelar, analisar e formular as hipóteses a serem consideradas, efetuar linearizações que se mostrarem necessárias, equacionar o modelo, solucionar as equações, examinar e validar a solução, aceitar ou não o modelo obtido.

Neste trabalho foi construído e analisado o modelo mecânico para um sistema massa-mola-amortecedor, determinando as equações matemáticas envolvidas na modelagem do sistema, resolvendo as equações para diferentes casos e analisando as respostas obtidas, construindo rotinas e gráficos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para desenvolvimento do levantamento bibliográfico será necessário que o aluno e o docente tenham acesso ao acervo da biblioteca e a algumas bases de periódicos e teses da Capes, o que está disponível no IFSP. Para desenvolvimento das equações e simulações serão utilizados computadores de uso pessoal e de propriedade do aluno e do docente, que deverão ter instalados softwares preferencialmente de código livre onde seja possível criar as rotinas, como, por exemplo, o Scilab. Não será necessário dispor de recursos para compra de computadores, nem para o desenvolvimento do projeto.

MATERIAIS E MÉTODOS

Para o estudo das equações foram utilizados livros e artigos sobre o tema, disponíveis na biblioteca do câmpus e também em sites de revistas especializadas. Para as simulações foi utilizado o software de código livre Scilab, instalado nos computadores de uso pessoal de propriedade do aluno e do docente e também nos computadores do Laboratório de Informática do câmpus.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

As equações lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos importantes como as oscilações mecânicas e elétricas.

Suponha que uma massa m está atada a uma mola flexível suspensa por um suporte rígido. Quando trocamos a massa, o alongamento da mola será obviamente diferente. Pela lei de Hooke a mola exerce uma força restauradora F oposta a direção do alongamento proporcional a deformação da mola x.

Essa relação é enunciada na forma $F = k \times x$, onde a constante de proporcionalidade k é chamada constante de mola.

A equação diferencial que modela o sistema é

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = F(t) \tag{1}$$

em que,

m – massa;
k – constante da mola;
γ – constante de amortecimento.

O sistema pode ser livre, amortecido ou forçado, dependendo das constantes que atuam na equação e a falta de domínio sobre as respostas desses sistemas pode provocar acidentes como os que ocorreram em 1959 e 1960 quando dois aviões comerciais caíram em virtude dos efeitos destrutivos de grandes oscilações mecânicas (ZILL, 2001).

Para analisar a resposta do sistema, foi construída uma rotina com o software Scilab para solução numérica e apresentação do gráfico que representa o movimento. A Figura 1 apresenta a rotina criada.

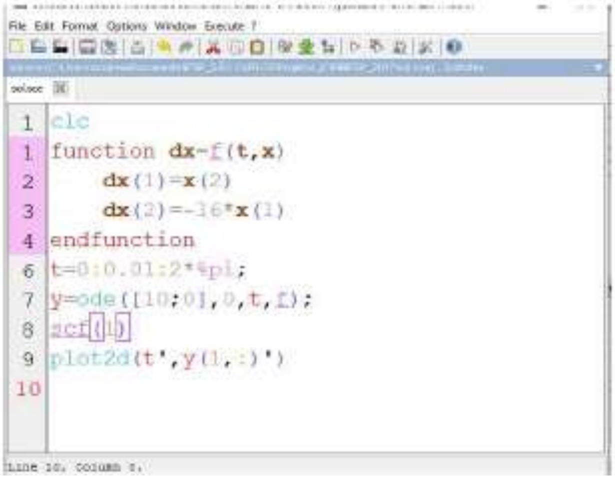

Figura 1: Rotina de solução e construção do gráfico da EDO.

A Figura 2 apresenta a resposta de um sistema livre e sem amortecimento, representado pelo problema de valor inicial dado por:

$$x''(t) + 16x'(t) = 0, \;\; x(0) = 10, \;\; x'(0) = 0 \tag{2}$$

onde $x(t)$ é o deslocamento da mola.

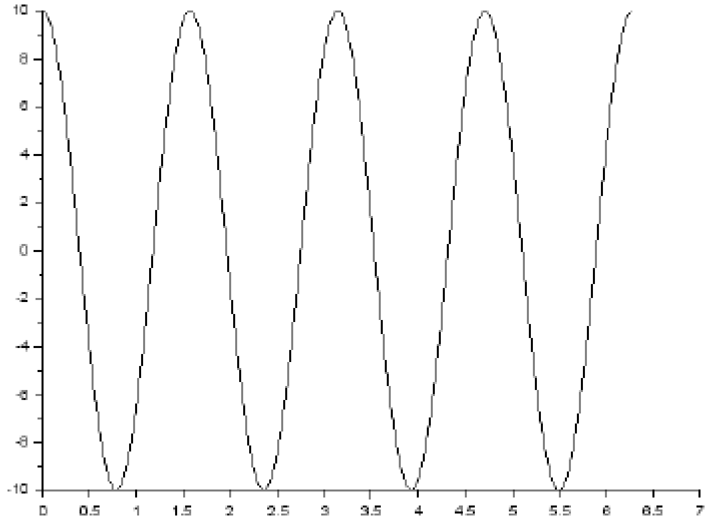

Figura 2: Vibração livre sem amortecimento.

Nas Figuras 3 e 4 são apresentados os gráficos de sistemas amortecidos, sendo que na Figura 3 o gráfico representa um sistema livre superamortecido. Neste caso a equação característica apresenta duas raízes reais distintas. Na Figura 4 o sistema é subamortecido e a equação característica apresenta uma raiz real.

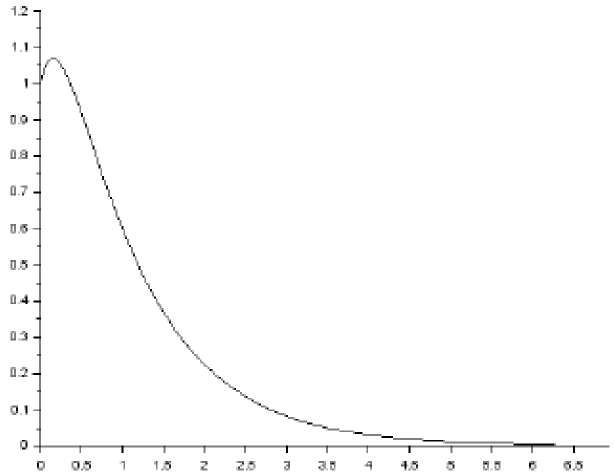

Figura 3: Sistema superamortecido.

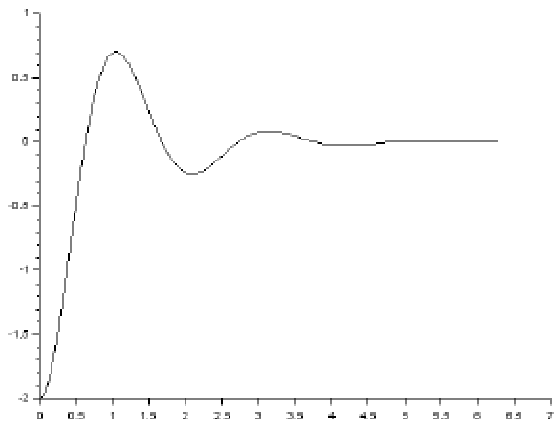

Figura 4: Sistema subamortecido

O sistema forçado com amortecimento representado pelo problema de valor inicial:

$$\frac{1}{5}x''(t) + 1.2x'(t) + 2x(t) = 5\cos(4t), \;\; x(0) = \frac{1}{2}, \;\; x'(0) = 0 \tag{3}$$

apresenta uma resposta uma resposta periódica representada pelo gráfico da Figura 5.

A massa parte do repouso em 0.5 m abaixo da posição de equilíbrio. O movimento é amortecido e está sob a ação de uma força externa periódica. Enquanto a força externa estiver atuando, o sistema vai continuar em movimento.

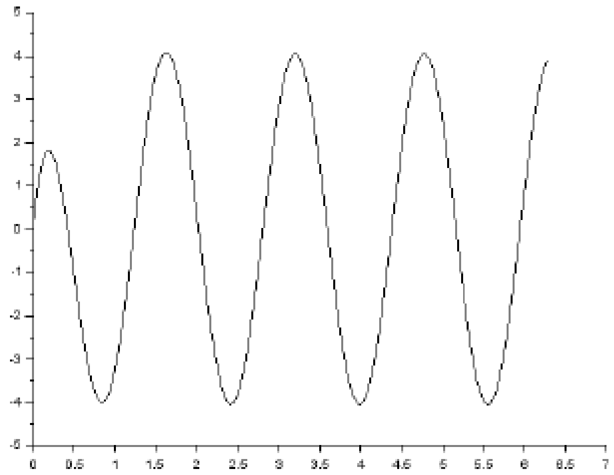

Figura 5: Sistema forçado.

CONCLUSÕES

A análise de vibrações tem fundamental importância para as mais diversas áreas. Além disso, esta análise pode ajudar na manutenção preditiva de máquinas, construção de grandes obras de engenharia civil, estudos de resistência de materiais e nas mais diversas áreas.

As rotinas construídas e os gráficos apresentados nos permitem analisar possíveis respostas das vibrações tendo maior controle sobre as oscilações.

Até o momento foram elaboradas rotinas e apresentados os gráficos dos diferentes problemas de vibrações mecânicas. Em seguida será estudado um caso prático representando dois acidentes aeronáuticos ocorridos em 1959 e 1960, onde duas aeronaves despencaram do céu por conta de ressonância. As vibrações que motor e as hélices faziam passavam para a caixa do motor que passavam para a asa do avião, ocasionando a quebra da asa quando atingia a frequência máxima de vibração da asa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o apoio financeiro dado pelo IFSP.

REFERÊNCIAS

BRANNAN, J. R.; BOYCE, W. E.; **Equações Diferenciais, Uma Introdução a Métodos Modernos e Suas Aplicações**. Rio de janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1ª edição, 2008.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H.; **Sistemas de Controle Modernos**. Rio de janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 8ª edição, 2001.

FOGAL, Marcelo Luiz Freitas; OLIVEIRA, Ernandes Rocha de. Artigo científico: **Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias**, Revista Virtual de Iniciação Acadêmica da UFPA, Vol. 1, Nº 1, março 2001. Disponível em: http://www.cultura.ufpa.br/rcientifica/ed_anteriores/pdf/ed_01_amsl.pdf. Acesso em 03 de julho de 2017.

NISE, N. S.; **Engenharia de Sistemas de Controle**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

OGATA, K.; **Engenharia de controle moderno**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 4ª edição, 2003.

PEGOLLO, C.; **Modelos Matemáticos em Engenharia: motivando a pesquisa e a integração.** Integração (São Paulo), São Paulo, v. Ano XI, n.41, p. 153-158, 2004.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R.; **Equações Diferenciais**. São Paulo: Makron Books, Vol 1, 3ª edição, 2001.