



III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Campus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018



UMA APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA QUÍMICA

FILIPE ZANATO LEMES¹, PATRICIA APARECIDA PINHEIRO²

¹ Graduando em Licenciatura em Química, IFSP Campus Sertãozinho, filipe.lemes@aluno.ifsp.edu.br.

² Professora EBTT – Matemática, IFSP Campus Sertãozinho, patricia.pinheiro@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Equações Diferenciais Ordinárias – 1.01.02.04-3

RESUMO: Este trabalho visa estreitar relações entre Química e Matemática, buscando uma aplicação do Cálculo Diferencial e Integral em problemas de correção da quantidade de açúcar e sólidos diluídos em soluções, como sucos e refrigerantes, problemas estes comuns na indústria. Esta quantidade pode ser obtida utilizando um refratômetro e é medida em escala brix que é a porcentagem de massa de sólidos (sacarose, sais minerais, proteínas, etc) em relação a massa total da solução. A pesquisa consistiu em produzir diferentes experimentos em que foi adicionada água ou solução de sacarose com proporções conhecidas para que o brix final da mistura seja o esperado, que é uma finalidade na indústria alimentícia, por exemplo. Quando produzidos os experimentos, foram obtidas expressões matemáticas que trarão taxas de variação entre as grandezas investigadas e, portanto, equações diferenciais ordinárias. O objetivo foi buscar uma aplicação de equações diferenciais na área de química para facilitar a compreensão no estudo da disciplina em sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: grau brix; equações diferenciais; derivadas; soluções; cálculo.

INTRODUÇÃO

A ideia do projeto surgiu a partir de um trabalho apresentado pelo aluno orientado para outra disciplina, no qual eram desenvolvidos conceitos de Cálculo Diferencial, especialmente conceitos de Equações Diferenciais de maneira informal dentro de uma pesquisa com experimentos químicos. O potencial de aplicação do Cálculo foi de fácil percepção e surgiu a proposta do projeto de iniciação científica. Neste projeto procuramos, principalmente, relacionar de forma interdisciplinar, conceitos de Química e de Matemática, especialmente os do Cálculo Diferencial e Integral. A partir de experimentos com medição de massas e brix de soluções pretendemos relacionar os seus resultados aos conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias. Iremos buscar relações de taxas de variação entre as grandezas envolvidas no experimento (massa da solução, massa de água adicionada, brix inicial, brix final da solução) e desenvolver conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Problemas de Valor Inicial para encontrar funções que expressem corretamente as relações entre as variáveis/grandezas envolvidas (ANTON, BIVENS, DAVIS, 2014).

Durante o projeto já foram realizadas atividades de pesquisa e grupos de estudos para o aprofundamento dos conceitos de derivada, equações diferenciais e escala brix e em seguida realizados os procedimentos experimentais que nortearam e nortearão o desenvolvimento das equações diferenciais e das funções de relação entre as grandezas envolvidas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A escala Brix foi criada pelo matemático e engenheiro alemão Adolf Ferdinand Wenceslaus Brix, e é usada para determinar a quantidade de sólidos diluídos em uma solução. O °Bx corresponde aproximadamente ao percentual de sólidos diluídos presentes na massa total de solução, por exemplo, 5°Bx em uma solução significa que há 5g de sólidos diluídos por 100g de solução, ou 5g de sólido em 95g de água (PILLING).

As indústrias de alimentos utilizam tal escala para controlar a concentração aproximada de açúcares em refrigerantes, sucos, vinho, doces, etc. O consumidor final espera sempre encontrar o mesmo padrão nos

alimentos, por este motivo, métodos para alcançar um produto final na concentração correta são muitos importantes na indústria. Neste trabalho objetiva-se obter fórmulas matemáticas precisas de correção de brix, por meio da adição de água ou solução de sacarose na solução inicial. Tais fórmulas devem ser obtidas utilizando-se, principalmente, dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, como funções, limites, derivadas, integrais e equações diferenciais.

Segundo Flemming (2006), função é uma lei que associa cada elemento de um conjunto A , chamado de domínio da função, a um único elemento em um conjunto B , chamado de contradomínio. Se a é um elemento de A e b , um elemento de B , de forma que exista uma função f que associe o elemento a ao elemento b , escrevemos: $f(a) = b$. Escrevemos ainda: $f:A \rightarrow B$ para denotar a função f de domínio A e contradomínio B . Chamamos cada variável a de variável independente e b de variável dependente. Ainda segundo Flemming (2006), se $f(x)$ é uma função definida em um intervalo, contendo a , dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é igual a L e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - a| < \delta$.

Guidorizzi (2001) apresenta a definição de derivada de uma função num ponto $(p, f(p))$ como o limite $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ e geometricamente, esta derivada é a inclinação da reta tangente à curva da função naquele ponto. Além da notação $f'(p)$ podemos escrever também $\frac{df(p)}{dx}$. Outra interpretação, a qual será mais explorada nesta pesquisa é a da derivada como taxa de variação. Pretendemos discutir as taxas de variação entre as grandezas observadas nos experimentos químicos e a partir desta observação, escrever equações diferenciais que, ao serem resolvidas, nos darão funções que mostrarão como se relacionam essas grandezas.

As equações diferenciais compõem um vasto campo de abordagem do Cálculo Diferencial e Integral, pois permitem modelar diversas situações em que há uma relação de taxa de variação entre grandezas. Em Boyce (2014) temos que uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma derivada, por exemplo dy/dx ; a incógnita desta equação é a função $y(x)$ que a satisfaz. É possível utilizar EDOs para modelar e resolver diversos problemas da química como, por exemplo, problemas de misturas. No caso específico desta pesquisa, queremos utilizar equações diferenciais para representar as relações entre as grandezas que serão observadas nos experimentos e resolvê-las para atingir os objetivos do trabalho.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os procedimentos experimentais foram divididos em quatro experimentos. O primeiro consistiu em adicionar água em cinco soluções (água e açúcar) de massas iguais e concentração de açúcar diferente, a fim de alcançarem valores de brix finais iguais e construir um gráfico de brix iniciais por água adicionada.

Tabela 1: Dados experimentais do 1º experimento.

Solução de sacarose.	Massa inicial	Brix inicial	Água adicionada	Brix final (média).	Massa final.	Brix inicial/brix final.	Massa final/massa inicial.
1º	100,459g	5,2	25g	4,2	125g	1,2	1,24
2º	100,448g	10,1	151g	4,1	251g	2,5	2,50
3º	100,930g	14,9	275g	4,6	376g	3,2	3,72
4º	100,877g	20,0	400g	4,3	501g	4,6	4,97
5º	100,464g	25,0	525g	4,4	625g	5,7	6,22

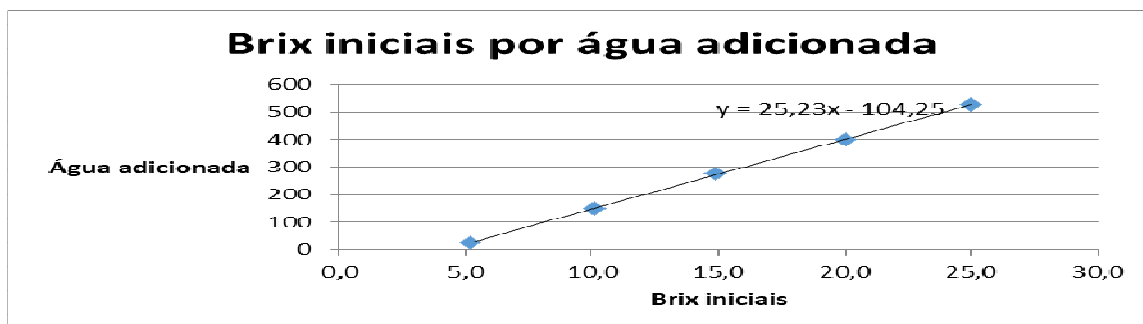


Figura 1: Gráfico da massa de água adicionada pelos brix iniciais.

A partir deste experimento buscamos determinar uma fórmula de redução de brix adicionando apenas água à uma solução, fórmula esta que relacione a quantidade de água a ser acrescentada em função do brix inicial da solução. Se apenas água será adicionada, podemos escrever que o brix final da solução será dado pela equação (1) apresentada a seguir:

$$B_f = \frac{B_i \cdot M_i}{M_i + M_a}, \quad (1)$$

onde:

B_f - brix final;

B_i - brix inicial;

M_i - massa inicial da solução e

M_a - massa de água adicionada à solução.

Na equação (1) podemos fazer:

$$B_f \cdot (M_i + M_a) = B_i \cdot M_i, \quad (2)$$

$$B_f \cdot M_i + B_f \cdot M_a = B_i \cdot M_i. \quad (3)$$

Se procurarmos pela taxa de variação média da massa de água adicionada em relação ao brix inicial, por exemplo da primeira para a segunda solução teremos:

$$B_{f2} \cdot M_{i2} + B_{f2} \cdot M_{a2} = B_{i2} \cdot M_{i2}, \quad (4)$$

$$B_{f1} \cdot M_{i1} + B_{f1} \cdot M_{a1} = B_{i1} \cdot M_{i1}. \quad (5)$$

Subtraindo (5) de (4) e considerando que neste experimento o brix final e a massa inicial foram tidos como constantes podemos escrever $B_{f2} = B_{f1} = B_f$ e $M_{i2} = M_{i1} = M_i$ e obtemos:

$$\frac{M_{a2} - M_{a1}}{B_{i2} - B_{i1}} = \frac{M_i}{B_f}. \quad (6)$$

Ou seja, podemos ver que a taxa média de variação da massa de água adicionada em relação ao brix inicial da solução é constante, como sugere o gráfico (Figura 1). Observe que brix final almejado no experimento é constante e igual a 4. Ao tomarmos o limite de (6) com brix inicial 1 tendendo a brix inicial 2 temos a taxa de variação instantânea que é a derivada da massa de água em função do brix inicial e obtemos a equação diferencial separável a seguir:

$$\frac{dM_a}{dB_i} = 25 \quad (7)$$

Resolvendo a equação (7) por separação de variáveis chegamos à

$$M_a = 25B_i + C \quad (8)$$

Substituindo os dados das soluções dos experimentos e resolvendo o problema de valor inicial obtido pode-se observar que a constante de integração C é igual -100 (oposto da massa inicial). Vale observar que as pequenas diferenças encontradas no experimento se devem a imprecisões dos instrumentos de medidas. E a função para este caso fica:

$$M_a = 25B_i - 100 \quad (9)$$

E pode ser verificada sua validade para as soluções produzidas no experimento. Assim, a função de correção de brix para este caso, ou seja, a função que nos dá a quantidade de água a ser adicionada à uma solução de forma a reduzir seu brix até um brix dado dependendo do brix inicial da solução será:

$$M_a = \frac{M_i}{B_f} \cdot B_i + C \quad (10)$$

A partir da expressão (1), isolando M_a obtemos a expressão em (10) e podemos observar que $C = -M_i$, e a solução geral para a correção de brix no primeiro experimento fica:

$$M_a = M_i \left(\frac{B_i}{B_f} - 1 \right) \quad (11)$$

Outros três experimentos foram produzidos lidando de diversas formas com as grandezas envolvidas, adicionando, não apenas água para correção de brix, como também suco e solução de sacarose. Os resultados destes ainda estão em fase de discussão e são esperadas discussões como a apresentada acima envolvendo os conceitos do cálculo.

CONCLUSÕES

Os procedimentos experimentais junto com os grupos de estudos mostraram ser de grande importância na compreensão dos conceitos de cálculo e principalmente sobre Equações Diferenciais Ordinárias. A concentração brix é um bom exemplo de aplicação dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral na área da química pela fácil medição da escala brix por um refratômetro, sendo possível analisarmos taxa de variação quando se adiciona água ou quando se mistura soluções diferentes. Finalizando o projeto pretende-se elaborar procedimentos e métodos pedagógicos para facilitar o ensino de Cálculo nos cursos de Química, aplicações de Equações Diferenciais e elaboração de equações na correção da escala brix com possível aplicação na indústria de alimentos.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 660 p. v. 1.
 ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 684 p. v. 2.
 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2014
 FLEMMING, D. M.; Gonçalves, M. B. **Cálculo A**. 6ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
 GUUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.
 PILLING, S. Prática 11 - **Refratometria**. Determinação do índice de refração de líquidos. Disponível em: https://www1.univap.br/spilling/FQE2/FQE2_EXP11_Refratometria.pdf . Acesso em: 05 mar. 2018.