



III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018



ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA MECÂNICO TORCIONAL

JOHANN VILLELA GRACINDO ALVES¹, LEANDRO JOSÉ ELIAS²

¹ Graduando em Engenharia Mecânica, Bolsista PIBIFSP, IFSP Campus Araraquara, johann.villela@aluno.ifsp.edu.br

² Docente da Área de Ciências e Matemática, IFSP Campus Araraquara, leandro.elias@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

RESUMO: Este trabalho apresenta algumas análises e resultados preliminares de um estudo realizado em um sistema torcional. O projeto tem como objetivo investigar e compreender o funcionamento de controladores para sistemas dinâmicos, com ênfase em sistemas mecânicos. É comum encontrar na literatura muitos exemplos de sistemas mecânicos que são modelados por equações ou por sistemas de equações diferenciais ordinárias. O estudo dessas equações ou sistemas de equações permite prever o comportamento dos estados medidos ao longo do tempo e, em alguns casos é possível intervir nessas equações realizando ações de controle. Neste trabalho são apresentados alguns resultados preliminares do estudo realizado, onde é utilizado um exemplo de um sistema torcional para aplicação dos conceitos teóricos abordados no projeto. Foi realizada uma simulação numérica em MATLAB e os resultados obtidos estão de acordo com teoria analisada.

PALAVRAS-CHAVE: equações diferenciais; modelagem matemática; sistemas lineares.

INTRODUÇÃO

Existe uma grande variedade de sistemas que são modelados matematicamente usando equações diferenciais ordinárias (EDOs) e possuem aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento (DORF e BISHOP, 2009; OGATA, 2010; BASSANEZI, 2014; ZILL, 2016; MITTITIER e ELIAS, 2017). Dentre essas aplicações, destaca-se a utilização da modelagem em sistemas mecânicos (RAO, 2008).

O estudo das equações diferenciais ordinárias (EDOs) que modelam um sistema permite prever o comportamento dos estados medidos ao longo do tempo. Um método de se realizar esse estudo consiste em reescrever as equações na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (BOYCE e DIPRIMA, 2010; ANTON e DOERING, 2012). A partir do sistema de equações obtido é possível determinar os pontos de equilíbrio e investigar a estabilidade desses pontos (MONTEIRO, 2006).

Quando se deseja um comportamento específico, como a estabilidade do ponto de equilíbrio, do sistema analisado é necessário realizar alguma ação de controle. Em geral, um sistema pode ser controlado por ações externas e, para isto, as equações do modelo são modificadas. Na literatura analisada é possível encontrar diversos tipos de controle aplicados a modelos físicos (CHEN, 1999; FARIA et al., 2014; ELIAS et al., 2016). Atualmente, diversos tipos de controladores são utilizados em eletrodomésticos, transportes terrestres, transportes aéreos, entre outros.

Neste trabalho é realizada uma análise das equações de um sistema torcional (RAO, 2008). Na metodologia é apresentada a modelagem matemática do sistema torcional, onde foram aplicados os métodos abordados na fundamentação teórica. Em resultados foi feita uma análise do ponto de equilíbrio do sistema em função dos seus parâmetros e, para exemplificar, foram tomados alguns valores de parâmetros para o caso analisado. Também foi realizada uma simulação numérica do sistema e os resultados foram ilustrados graficamente. Nas conclusões é feita uma breve análise dos resultados obtidos e também são apresentadas algumas perspectivas e propostas de estudos para a próxima etapa do projeto.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma das maneiras de investigar o comportamento de um sistema dinâmico modelado por equações diferenciais é por meio de um sistema matricial. Para isto é necessário transformar uma EDO de segunda ordem ou de ordem superior em um sistema EDOs de primeira ordem (MONTEIRO, 2006; BOYCE, 2010; ZILL, 2016). Considere uma EDO de ordem n , linear com coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t), \quad (1)$$

onde x é a variável dependente, t é a variável independente e a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 são constantes reais. Se $f(t) = 0$, então a equação (1) é homogênea.

Para transformar a equação (1) em um sistema de equações diferenciais de primeira de ordem é realizada a mudança de variável $y_1 = x(t)$, $y_2 = dx/dt$, ..., $y_n = d^{n-1}x/dt^{n-1}$.

Ao derivar cada as novas variáveis y_i para $i = 1, \dots, n$, em relação ao tempo tem-se $\dot{y}_1 = dx/dt$, $\dot{y}_2 = d^2x/dt^2$, ..., $\dot{y}_n = d^n x/dt^n$, pode se obter o sistema matricial $\dot{y} = Ay + u$, com $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$, $u = [0 \ 0 \ \dots \ f(t)]^T$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & \dots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

O ponto de equilíbrio do sistema é obtido para $\dot{y} = 0$, ou seja, para $Ay + u = 0$. A partir do cálculo dos autovalores e dos autovetores da matriz A é possível determinar a solução geral da equação (1) (BOYCE e DIPRIMA, 2010; ANTON e DOERING, 2012; ZILL, 2016).

Também é possível investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema ao se analisar os autovalores da matriz A (MONTEIRO, 2006; BOYCE, 2010). Sendo λ_i , $i = 1, \dots, n$, autovalores da matriz A , o sistema possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável quando os autovalores têm parte real negativa, instável quando possui parte real positiva e é um ponto de sela quando tiverem sinais opostos. Segundo MONTEIRO (2006), no caso em que o autovalor é complexo com parte real nula o ponto de equilíbrio é classificado como um centro. Para o caso bidimensional, onde os autovalores são $\lambda = \pm\beta i$, as soluções são periódicas e oscilam em torno do ponto de equilíbrio com período $T = 2\pi/\beta$. Já as trajetórias no retrato de fases formam elipses em torno da origem.

METODOLOGIA

Para a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico foi escolhido como exemplo o Sistema Torcional apresentado na Figura 1.

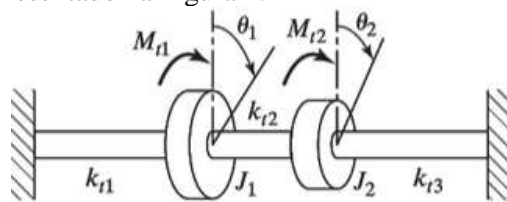


FIGURA 1. Sistema Torcional (RAO, 2008)

Esse sistema apresenta um eixo rotativo com dois discos, 1 e 2, nele acoplados e que giram juntos, formando assim um único conjunto. Considerando que mesmo acoplados os discos fiquem ligeiramente soltos em relação ao eixo, a força de atrito age entre eles, gerando assim momentos de resistência ao giro representados por M_{t1} e M_{t2} . As equações que descrevem o sistema são

$$\begin{aligned} J_1 \theta''_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 &= M_{t1} \\ J_2 \theta''_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 &= M_{t2} \end{aligned} \quad (3)$$

onde θ_1 e θ_2 representam a variação angular do espaço dos dois discos em função do tempo, k_{t1} , k_{t2} e k_{t3} são as constantes elásticas rotacionais dos três segmentos do eixo, J_1 e J_2 os momentos de inércia de ambos os discos que são calculados por $J_i = m_i r_i^2 / 2$, com m_i e r_i , $i = 1, 2$, a massa e o raio de cada disco, respectivamente.

Considerou-se que os discos estejam completamente presos ao eixo de modo que não haja um escorregamento entre eles, o que faz a força de atrito e, conseqüentemente os momentos de resistência ao giro M_{t1} e M_{t2} se anularem na equação (3). Para simplificar a notação foi tomado $k_{t1} = k_1$, $k_{t2} = k_2$ e $k_{t3} = k_3$. Na equação (3) foi realizada a mudança de variáveis $y_1 = \theta_1$, $y_2 = \theta_2$, $y_3 = \theta'_1$ e $y_4 = \theta'_2$, obtendo assim o sistema matricial $Y' = AY$, onde $Y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/J_1 & k_2/J_1 & 0 & 0 \\ k_2/J_2 & -(k_2 + k_3)/J_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Verifica-se que o ponto de equilíbrio do sistema é a origem. Para a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio é necessário calcular os autovalores da matriz A que podem ser obtidos pela equação característica

$$\lambda^4 J_1 J_2 + \lambda^2 (J_1 k_3 + J_1 k_2 + J_2 k_1 + J_2 k_2) + (2k_2 k_3 + k_1 k_2) = 0. \quad (5)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Supondo que $m_1 = m_2 = 2 \text{ Kg}$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 4 \text{ N.m}$ sejam os parâmetros fixos e que somente os raios dos discos variem, a equação (5) fica $\lambda^4 r_1^2 r_2^2 + 8(r_1^2 + r_2^2)\lambda^2 + 48 = 0$, sendo assim uma equação biquadrada. Fazendo $\lambda^2 = \Psi$, então têm-se a equação quadrática $\Psi^2 r_1^2 r_2^2 + 8(r_1^2 + r_2^2)\Psi + 48 = 0$, cuja solução é

$$\Psi = \frac{-4(r_1^2 + r_2^2) \pm 4\sqrt{\Delta}}{r_1^2 r_2^2} \quad (6)$$

onde $\Delta = r_1^4 - r_1^2 r_2^2 + r_2^4$. Verifica-se que $\Delta = (r_1^2 - r_2^2)^2 + r_1^2 r_2^2$ e, portanto, $\Delta > 0$, pois os raios são sempre maiores que zero. Verifica-se ainda que $(r_1^2 + r_2^2) > \sqrt{\Delta}$. Logo as raízes obtidas para Ψ são reais e negativas. Como $\lambda^2 = \Psi$, então os autovalores obtidos são complexos conjugados com parte real nula. Logo o ponto de equilíbrio é um centro.

Para exemplificar as análises realizadas foram tomados os valores de parâmetros como mencionados anteriormente e os raios $r_1 = 0.05 \text{ m}$ e $r_2 = 0.07 \text{ m}$. Os autovalores obtidos foram $\lambda_1 = +61.6609i$, $\lambda_2 = -61.6609i$, $\lambda_3 = +32.1028i$ e $\lambda_4 = -32.1028i$. Também foi realizada uma simulação do sistema $Y' = AY$, com a matriz A da equação (4), em MATLAB. A condição inicial tomada foi $Y = [\pi/4 \ \pi/2 \ 0 \ 0]^T$. A Figura (2) ilustra a variação dos estados que representam as variações angulares (y_1 e y_2) e as velocidades de rotação (y_3 e y_4) dos discos 1 e 2, respectivamente. É observado que os estados variam de forma cíclica em torno do ponto de equilíbrio que é a origem do sistema. Esta é uma característica do ponto de equilíbrio obtido que é um centro, segundo MONTEIRO (2006).

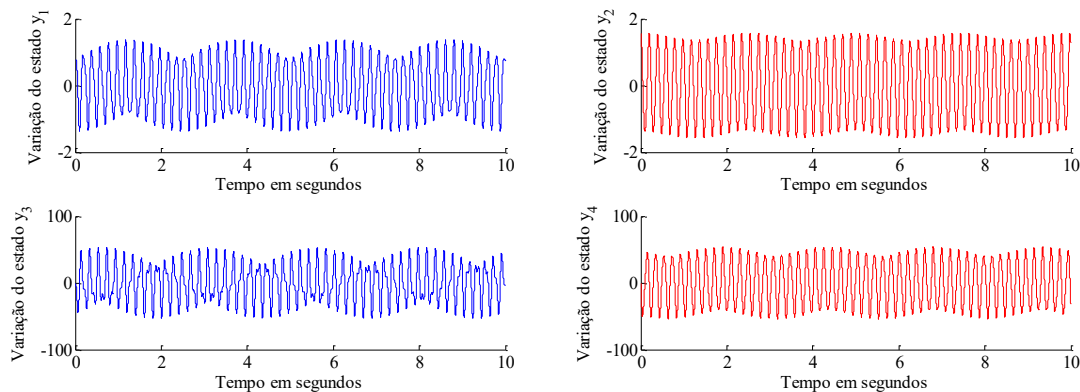


Figura 2. Variação dos estados do sistema em relação ao tempo.

CONCLUSÕES

Este estudo preliminar de EDOs foi necessário para que se possa iniciar a pesquisa sobre o controle de sistemas dinâmicos, sendo eles lineares ou não. Esta etapa do projeto possibilitou a obtenção de um conhecimento teórico da resolução de EDOs, da análise de estabilidade do ponto de equilíbrio e da simulação numérica de EDOs. Na elaboração deste trabalho foram aplicados todos os conhecimentos citados anteriormente.

A partir do modelo do sistema torcional foi possível reescrever suas equações na forma matricial, obter o ponto de equilíbrio e verificar sua estabilidade via os autovalores da matriz associada ao sistema. Os raios dos discos foram tomados como parâmetros livres e observou-se que independente dos valores atribuídos a eles, o ponto de equilíbrio apresenta sempre a mesma característica, no caso um centro. Essa característica foi observada nos gráficos obtidos a partir das simulações numéricas realizadas.

A característica de um ponto de equilíbrio pode ser alterada utilizando ações de controle. Essas ações serão investigadas na próxima etapa do projeto. Pode-se ainda tomar outros exemplos para estudo, tais como modelos não lineares onde é necessário utilizar alguma técnica de linearização, pois grande parte dos problemas físicos encontrados na literatura apresentam alguma não linearidade em suas equações.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; DOERING, C. I. (Trad. tec.). **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. xv, 768 p.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4a ed. São Paulo: Contexto, 2014. 389 p.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 663 p.
- CHEN, C. T. **Linear system theory and design**. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. xx, 724 p.
- ELIAS, L. J., et al. **Controle de um Levitador Magnético com Atenuação de Distúrbio**. Congresso Nacional de Matemática Aplicada, 2016.
- FARIA, F. A., et al. **A fuzzy lyapunov function approach for stabilization and H_{∞} control of switched TS fuzzy systems**. *Applied Mathematical Modelling*, 38(19-20):4817–4834, 2014.
- MITTITIER J. G.; ELIAS L.J. **Lógica fuzzy aplicada a um modelo epidemiológico**. II EnICT, 2017.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 625 p.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. 781 p.
- RAO, S. **Vibrações mecânicas**. 4.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 424 p.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. xliv, 437 p.