III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA DE DIABETES DE MELITO

JESSICA VITÓRIA DA ROCHA SILVA[1], LEANDRO JOSÉ ELIAS[2]

[1] Graduanda em Licenciatura em Matemática, IFSP Campus Araraquara, jessica.v@aluno.ifsp.edu.br.
[2] Docente do Departamento de Matemática e Educação, IFSP Campus Araraquara, leandro.elias@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento: Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

RESUMO: Este trabalho apresenta algumas análises e resultados preliminares dos estudos realizados em um projeto de pesquisa de iniciação científica. O projeto tem como objetivo investigar e compreender o funcionamento de controladores para sistemas dinâmicos. Em geral, esses sistemas são modelados matematicamente por equações diferenciais ordinárias e possuem aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, tais como na biologia e nas engenharias. O estudo dessas equações permite prever o comportamento do sistema ao longo do tempo e, em alguns casos é possível intervir nessas equações realizando ações de controle. Neste trabalho é utilizado um exemplo da medição de concentração de glicose na corrente sanguínea para aplicação dos conceitos preliminares estudados no projeto. A análise do ponto de equilíbrio via álgebra linear constatou que o sistema é estável de acordo com as condições estudadas.

PALAVRAS-CHAVE: equações diferenciais; modelagem matemática; sistemas lineares.

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa apresentar os resultados preliminares obtidos em um projeto de pesquisa de iniciação científica, e tem como objetivo estudar e compreender o funcionamento de controles de sistemas dinâmicos. Na maioria dos casos os sistemas dinâmicos são modelos matemáticos através de equações diferencias ordinárias (EDOs), esses sistemas são muito estudados devido a seu amplo campo de aplicação nas ciências da natureza e outras, como os estudos de DORF e BISHOP (2009), OGATA (2010), BASSANEZI (2014), ZILL (2016) e MITTITIER e ELIAS (2016).

A análise das EDOs de um sistema permite prever o comportamento dos estados medidos ao longo do tempo. Uma forma de se analisar essas equações é reescrevê-las na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (BOYCE e DIPRIMA, 2010; ANTON e DOERING, 2012). A partir da análise do sistema de equações de primeira ordem é possível determinar os pontos de equilíbrio e investigar a estabilidade nesses pontos (MONTEIRO, 2006).

Em muitos casos é possível intervir nos modelos com a finalidade de se estabilizar um ponto de equilíbrio desejado. Tal intervenção realizada nos modelos é conhecida como ação de controle. Na bibliografia analisada é possível encontrar diversos tipos de controle aplicados a modelos físicos em CHEN, (1999), FARIA at. al (2014) e ELIAS at. al (2016). O uso de controladores em sistemas dinâmicos tem aplicações em diversas áreas, tais como na fabricação de eletrodomésticos, transportes terrestres, transportes aéreos, entre outros.

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para a análise das equações de um modelo de Diabetes Melito (BASSANEZI, 2014). O método adotado para a análise será detalhado na fundamentação teórica e depois aplicado na metodologia. Para a coleta de resultados foi feita uma análise do ponto de equilíbrio do sistema em função dos seus parâmetros e, para exemplificar, foram adotados alguns valores de parâmetros para os casos analisados. Além disso foi realizada uma simulação numérica do sistema. Nas conclusões são apresentadas as análises dos resultados obtidos e também são apresentadas algumas perspectivas e propostas de estudos para a próxima etapa do projeto.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo de sistemas dinâmicos se faz importante para analisar problemas que envolvem variáveis dependentes do tempo. Como afirma BOYCE e DIPRIMA (2010) “Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma. [...] Nesse e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um sistema de duas ou mais equações diferenciais”. Segundo ZILL (2016) para fazer a análise desses sistemas via álgebra linear, primeiro, é necessário transformar uma equação diferencial de ordem *n* em *n* equações de primeira ordem.

De acordo com BOYCE e DIPRIMA (2010) pode-se tomar uma equação diferencial genérica

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Definindo as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ por $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$, segue que

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

O sistema de equação (2) é equivalente ao (1). De acordo com MONTEIRO (2006) a vantagem de trabalhar com *n* equações de primeira ordem ao invés de analisar uma equação de ordem *n* é a possibilidade de reescrever o sistema na forma matricial, tornando-se possível analisar o sistema via álgebra linear (ANTON e DOERING, 2012). Por exemplo, considere uma equação diferencial de segunda ordem

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = f(t), \tag{3}$$

Em que a_0, a_1e a_2 são constantes arbitrárias. Definindo as variáveis $y_1 = x$ e $y_2 = \dot{x}$, e derivando as novas variáveis em relação ao tempo obtêm-se o sistema $\dot{Y} = AY + F$, onde $Y = [y_1 \quad y_2]^T,\ F = [0 \quad f(t)]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\,a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

De acordo com ZILL (2016) se $f(t) = 0$, então o sistema é chamado de homogêneo e, além disso, o ponto de equilíbrio é obtido quando $\dot{Y} = 0$, ou seja, para encontrar o ponto de equilíbrio é necessário igualar as n equações de primeira ordem do sistema igual a zero. Em muitos casos o ponto de equilíbrio é a própria origem. Para realizar algumas análises de estabilidade é necessário deslocar o ponto de equilíbrio para a origem, por meio de uma substituição de variáveis (CHEN, 1999; MONTEIRO, 2006).

A análise de estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema de equações diferenciais na forma matricial é feita através dos autovalores e autovetores da matriz do sistema. Segundo MONTEIRO (2006) “Dada uma matriz quadrada A, um número λ é chamado de autovalor de A se há um vetor-coluna não-nulo$\vec{v}$, tal que: $Av = \lambda v$”. O polinômio característico para um sistema linear de ordem *n* pode ser obtido pela relação $\det(A - \lambda I) = 0$. Para um sistema de segunda ordem, se λ_1 e λ_2 forem reais e de sinais opostos o ponto de equilíbrio é chamado de sela, caso λ_1 e λ_2 forem positivos, então o ponto de equilíbrio é instável, se forem negativos, então o ponto é estável. Por fim se λ_1 e λ_2 forem complexos conjugados têm-se três casos, o primeiro com a parte real positiva, sendo instável, o segundo com a parte real negativa é estável e, o terceiro, quando a parte real nula, sendo o ponto de equilíbrio um centro.

As soluções dos sistemas de equações diferenciais também podem ser obtidas pelos autovalores e Autovetores da matriz associada ao sistema (MONTEIRO, 2006; BOYCE e DIPRIMA, 2015; ANTON e DOERING, 2012; ZILL, 2016).

METODOLOGIA

Neste trabalho foi feita a análise de um modelo de Diabetes Melito (BASSANEZI, 2014). Tal modelo determina a interação entre a concentração de glicose e o hormônio líquido com predominância de insulina, representado pelo seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = -a_1g - a_2h + f(t) \\ \dfrac{dh}{dt} = -a_3h + a_4g \end{cases}, \tag{5}$$

Em que:
g é a taxa de variação da concentração de glicose no sangue;
h é a taxa de variação da concentração de hormônio líquido com predominância de insulina no sangue;
$f(t)$ é a taxa externa de concentração de glicose no sangue;
$a_1,\ a_2, a_3$ e a_4 são constantes positivas.

Para esse estudo será considerado somente a parte homogênea do sistema, ou seja, que não há aumento na taxa de glicose por causas externas, logo $f(t) = 0$.

O ponto de equilíbrio do sistema é obtido a partir de

$$\begin{cases} 0 = -a_1 g - a_2 h \\ 0 = -a_3 h + a_4 g \end{cases} \tag{6}$$

Da primeira equação no sistema (6) obtêm-se que $g = -\frac{a_2}{a_1}h$. Substituindo na segunda equação do sistema (6) têm-se que $-a_3 h + a_4(-a_2 h/a_1) = 0 \implies -h(a_3 + a_4 a_2/a_1) = 0 \implies h = 0 \implies g = 0$. Logo o ponto de equilíbrio do sistema é a origem. Para a análise da estabilidade da origem do sistema será calculado os autovalores em função dos parâmetros $a_1,\ a_2, a_3$ e a_4. Considere o vetor de estado $X = [g \quad h]^T$. Assim, o sistema (6) pode ser escrito na forma matricial $\dot{X} = AX$, com

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Os autovalores da matriz A são determinados por $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$, obtendo o polinômio característico $\lambda^2 + (a_1 + a_3)\lambda + a_2 a_4 + a_1 a_3 = 0$.

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = \left[-(a_1 + a_3) + \sqrt{(a_1 + a_3)^2 - 4(a_2 a_4 + a_1 a_3)}\right]/2$ e $\lambda_2 = \left[-(a_1 + a_3) - \sqrt{(a_1 + a_3)^2 - 4(a_2 a_4 + a_1 a_3)}\right]/2$.

Denotando $a_1 + a_3 = \alpha$ e$a_2 a_4 + a_1 a_3 = \omega^2$, inspirados em BASSANEZI (2014), segue que $\lambda_1 = \left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}\right]/2$ e $\lambda_2 = \left[-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}\right]/2$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Observe que os parâmetros do sistema são positivos, então $\alpha > 0$. Considere $\Delta = \alpha^2 - 4\omega^2$. Desse modo, será feita uma análise do sinal dos autovalores em função dos parâmetros do sistema. Note que para o exemplo analisado neste trabalho será necessário analisar três casos distintos.

No primeiro caso, considere $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha/2$. Como α pode assumir apenas valores positivos, então o ponto de equilíbrio é estável. Para o segundo caso, considere $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\omega^2 > 0$. Como $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha| = \sqrt{\alpha^2} > \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}$, pois $\omega^2 > 0$. Logo, $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}$ e, portanto, $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$. Assim o equilíbrio é estável. No terceiro caso é quando $\Delta < 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\omega^2 < 0$. Deste modo, os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa, o que implica que o ponto de equilíbrio é estável.

Para exemplificar os resultados obtidos foram assumidos valores para os parâmetros dos casos tratados anteriormente. No primeiro caso, foram assumidos $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1$ e $a_4 = 0{,}25$, e os autovalores obtidos foram $\lambda_1 = \lambda_2 = -3/2$. No segundo caso, os valores de parâmetros tomados foram $a_1 = 2, a_2 = 0{,}2, a_3 = 1$ e $a_4 = 0{,}2$, resultando em $\lambda_1 \cong -1{,}04$ e $\lambda_2 \cong -3{,}96$. No terceiro caso, os valores de parâmetros foram $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1$ e $a_4 = 1$, resultando em $\lambda_1 \cong (-3 + \sqrt{3}i)/2$ e $\lambda_2 \cong (-3 - \sqrt{3}i)/2$.

A simulação numérica do sistema (5) foi realizada através do *Software* MATLAB, para os valores de parâmetros dos três casos analisados e, as condições iniciais $g(0) = 50$ e $h(0) = 10$. Observe que está implícito que o sistema (5) apresenta variáveis de estado deslocadas com o propósito do ponto de equilíbrio ser a origem do sistema. Deve ser notado que a medida que as taxas de hormônio e glicose tendem a zero, na verdade essas taxas tendem a um valor específico. Em todos os casos analisados as concentrações de glicose e de hormônio tendem ao equilíbrio como mostra a Figura 1. Além disso, é possível que o ponto de equilíbrio seja alterado caso seja considerado o aumento na taxa de glicose por fatores externos, ou seja, para o sistema (5) forçado, com $f(t) \neq 0$.

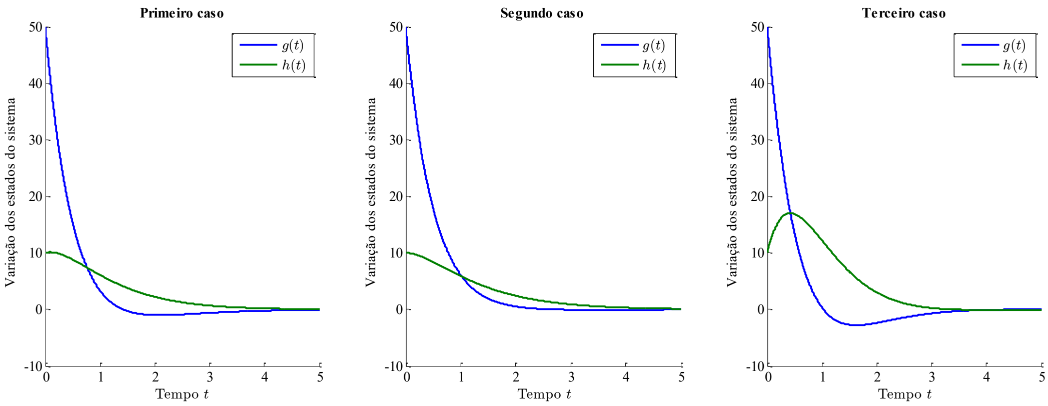

FIGURA 1. Simulação de valores distintos dos parâmetros do sistema.

CONCLUSÕES

Na análise feita no modelo de Diabetes Melito conclui-se que o ponto de equilíbrio é sempre estável, independente dos valores assumidos para os parâmetros do sistema. As simulações numéricas realizadas nos casos analisados ilustraram a evolução dos estados ao longo do tempo em que, verificou-se a estabilidade da origem. Neste estudo não foi considerado nenhuma influência externa ao sistema, o que pode contribuir para a mudança da dinâmica do sistema.

Os estudos teóricos apresentados eram pré-requisitos para o estudo de controladores de sistemas dinâmicos, que serão abordados na próxima etapa do projeto. Além disso, será necessário investigar métodos para análise e controle de sistemas não lineares, pois grande parte de sistemas físicos encontrados na literatura apresentam não linearidades em seus modelos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; DOERING, C. I. (Trad. tec.). **Álgebra linear com aplicações.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.xv, 768 p.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4a ed. São Paulo: Contexto, 2014.389 p.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.**10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 663 p.

CHEN, C. T. **Linear system theoryand design.** 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1999.334 p.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos.** 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.xx, 724 p.

ELIAS, L. J., et al. **Controle de um Levitador Magnético com Atenuação de Distúrbio**. Congresso Nacional de Matemática Aplicada, 2016.

FARIA, F. A., et al. **A fuzzy Lyapunov function approach for stabilization and H∞ control of switched TS fuzzy systems. Applied Mathematical Modelling**, 38(19-20):4817–4834, 2014.

MITTITIER J. G.; ELIAS L. J. **Lógica fuzzy aplicada a um modelo epidemiológico.** II EnICT, 2017.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos.** 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.625 p.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.781 p.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.**10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016..xliv, 437 p.