III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018

A TÁBUA DE GALTON COMO FERRAMENTA DE ESTUDO DAS DISTRIBUIÇÕES BINOMIAL E NORMAL E DE SUA RELAÇÃO PELO TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

MATHEUS DE ALMEIDA[1], VITOR GUSTAVO DE AMORIIM[2], KARLA BARBOSA DE FREITAS SPATTI[3]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, IFSP Campus Araraquara, matheus.almeida@aluno.ifsp.edu.br
[2]Docente, IFSP Campus Araraquara, vitoramorim@ifsp.edu.br
[3]Docente, IFSP Campus Araraquara, karla.freitas@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Teoremas de Limite – 1.02.01.03-3

RESUMO: As distribuições normal e binomial de probabilidades têm um papel central na modelagem de fenômenos de natureza estatística cujas variáveis de interesse são, respectivamente, discretas e contínuas. Cada uma delas,podem ser aplicadas em diversas áreas de conhecimento científico e tecnológico. Além disso, tais distribuições estão relacionadas por meio do Teorema Central do Limite, resultado fundamental da Teoria das Probabilidades. Neste contexto, o dispositivo desenvolvido pelo matemático inglês Francis Galton, conhecido como Tábua de Galton, produz um experimento probabilístico capaz de ilustrar o resultado contido no referido teorema e, mais do que isso, comparar os resultados do experimento com os modelos teóricos das distribuições normal e binomial. Dessa forma, este trabalho propõe um estudo teórico-prático dos modelos probabilísticos binomial e normal e do Teorema Central do Limite, mediante simulações experimentais probabilísticas realizadas em duas Tábuas de Galton, projetadas e construídas durante a execução do projeto. Procura-se ainda estabelecer em que medida o experimento proposto realiza de fato o papel a que se propõe ou, inversamente, em que medida o modelo teórico descreve o experimento. Finalmente, são buscadas formas de refinamento do experimento em busca de uma aproximação entre os aspectos citados.

PALAVRAS-CHAVE: distribuição binomial; distribuição normal; tábua de Galton; teorema central do limite.

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa de iniciação científica tem como objetivo aprofundar o conhecimento sobre as distribuições binomial e normal de probabilidades e sua relação dada pelo Teorema Central do Limite, por meio de simulações experimentais probabilísticas realizadas em duas Tábuas de Galton, projetadas e construídas durante a execução do projeto.

Francis Galton (1822-1911), “[...] foi um dos últimos cavaleiros cientistas, era um homem brilhante, foi um dos fundadores da antropologia, meteorologista, matemático, biólogo e inventou os parâmetros estatísticos conhecidos como teoria da regressão e correlação [...]” (SALGADO-NETO; SALGADO, 2011, p.223). Criador também do Quincunx, conhecido como Tábua de Galton, dispositivo este que ao ser manipulado, pode-se observar a formação de curvas de densidades de probabilidade, aplicável a muitos fenômenos no campo da Biologia e da Física (DANTAS, 2008; MORGADO et al., 1991; LIMA E MAGALHÃES, 2015; ROSS, 2010, ROSS, 2010).

A Tábua de Galton é constituída de uma caixa retangular, na qual há uma abertura para a inserção de pequenas esferas que, ao serem despejadas, encontrarão objetos cilíndricos fixados como obstáculo, sendo estes dispostos em níveis de forma que, tomando-os três a três, as distâncias entre seus centros formam um triângulo equilátero e, ao final do percurso de cada esfera, estas são coletadas por canaletas que estão ordenadas na parte inferior do dispositivo. As esferas, ao colidirem com os objetos cilíndricos e caírem, seja para a direita, bem como para a esquerda, encontrarão um novo obstáculo. E assim, há uma série de colisões sucessivas, um obstáculo no primeiro nível, dois no segundo, três no terceiro, até atingir uma canaleta ao final do percurso que estará à esquerda ou à direita do último obstáculo em que a esfera colidiu. A figura 1 abaixo ilustra o experimento.

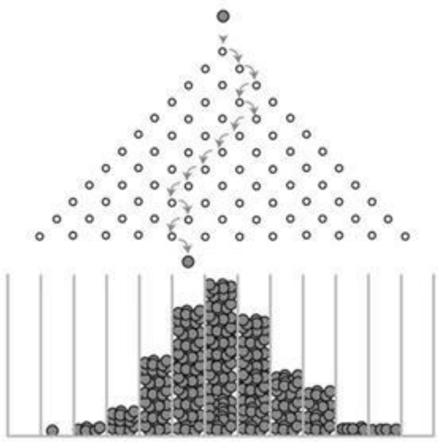

FIGURA 1. Ilustração da Tábua de Galton
Fonte:https://www.alanzucconi.com/2015/09/09/understanding-the-gaussian-distribution/galton-board/

Pode-se construir a tábua de modo que a abertura de inserção seja suficientemente estreita para que, cada esfera, após ser despejada no dispositivo, atinja, a princípio, o obstáculo central da primeira fileira, podendo então cair para a direita (do observador), com probabilidade p ou para a esquerda, com probabilidade $1 - p$. Admite-se que assim aconteça para as demais fileiras. Logo, pode-se afirmar que o experimento descrito consiste em uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli, visto que cada esfera colidirá com apenas um obstáculo em cada uma das fileiras. Portanto, a quantidade de vezes que uma esfera cai para a direita, até que atinja uma das canaletas, será uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n (número de fileiras) e p.

É razoável admitir a hipótese de que, a cada queda da esfera, se tem probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ de queda para esquerda ou para a direita. Então, numerando as canaletas da esquerda para a direita de 0 a n (número de canaletas), a probabilidade de que uma esfera solta no dispositivo caia na canaleta k, é, por outro lado, a probabilidade de que a esfera caia k vezes para a direita e $n - k$ vezes para a esquerda durante seu percurso. Ou seja, a distribuição de probabilidades da Tábua segue o modelo binomial com $p = \frac{1}{2}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

Dessa forma, um experimento da Tábua de Galton planejado e construído com um número suficientemente grande de canaletas e esferas, pode ser utilizado para estudar teoricamente e experimentalmente as propriedades da distribuição binomial de probabilidades, verificando em que medida o experimento de fato cumpre o papel a que se propõe, ou seja, em que medida o experimento satisfaz o modelo binomial de distribuição de probabilidades.

Além disso, ao observar a distribuição das esferas em alguns experimentos já realizados com tábuas de Galton, verifica-se o desenho aproximado da curva normal (AQUINO, 2004; SALGADO-NETO e SALGADO, 2011). Tal aproximação deve-se à conhecida propriedade de que a distribuição binomial, para valores de n arbitrariamente grandes, tem sua função de distribuição cada vez mais próxima da função de distribuição da normal. Tal resultado, fundamental na Teoria das Probabilidades, é consequência do Teorema Central do Limite.

Assim, pode-se usar a tábua de Galton para explorar tal aproximação, estudar as propriedades da curva normal, determinar valores de n para erros de aproximação dados, verificar a consistência também deste modelo e do experimento e comparar os resultados obtidos de aproximação nos dois modelos, binomial e normal.

Dito isto, este trabalho propõe a construção de duas Tábuas de Galton com números diferentes de canaletas, com o objetivo de ilustrar a melhor aproximação, da binomial à normal, para valores maiores de n. A partir das tábuas projetadas e construídas, buscando fidelidade ao experimento proposto, podem ser realizadas várias simulações, obtendo-se assim diversas amostras aleatórias que podem ser usadas para a análise e comparação do modelo teórico com os resultados obtidos.

Finalmente, realizadas as análises dos resultados, pretende-se propor métodos de refinamento do experimento, identificando elementos da tábua que possam potencializar distorções e projetando novos experimentos com base nos resultados obtidos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A distribuição binomial de probabilidades modela experimentos que consistem em n repetições de ensaios independentes com apenas dois resultados possíveis, denominados sucesso, com probabilidade p, e fracasso, com probabilidades $1-p$. Assim, pode-se mostrar que a probabilidade de se obter k sucessos nas n realizações de ensaios é dada por

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=\ 0,1,\dots,n$$

A média ou esperança ($E(X)$) e a variância ($Var(X)$) de uma variável aleatória binomial qualquer são dadas por $E(X)=np$ e $Var(X)=np(1-p)$, respectivamente (ROSS, 2010).

Por outro lado, a distribuição normal de probabilidades, é muito usada para modelar experimentos que envolvam variáveis aleatórias contínuas cuja frequência de distribuição dos dados se dá de forma simétrica em torno da médiae se aproxima de zero a medida que o dado se distancia da média. A função densidade de probabilidade da distribuição normal com média μ e variância é σ^2 dada por

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in\mathbb{R}$$

As distribuições binomial e normal estão diretamente relacionadas por meio do Teorema Central do Limite (ROSS, 2010), que estabelece que a função de distribuição do modelo binomial se aproxima da função de distribuição do modelo normal, à medida que o tamanho da amostra binomial cresce arbitrariamente. Neste contexto, a função densidade da distribuição normal que se aproxima da binomial de parâmetros n e p, tem média (μ) e variância (σ^2) iguais a média e variância da binomial envolvida, ou seja, toma-se para o modelo $\mu=np$ e $\sigma^2=np(1-p)$.

Assim, pode-se dizer que, para valores suficientemente grandes de n, a distribuição binomial com parâmetros n e p pode ser aproximada pela variável aleatória contínua cuja densidade é

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Essa função densidade será usada como modelo teórico aproximado para a distribuição das esferas na tábua. Assim, pode-se verificar, experimentalmente, a diferença entre os resultados obtidos e os resultados esperados nos dois modelos. Adicionalmente, podemos obter a relação do valor de n com o erro de aproximação dado pelo Teorema Central do Limite.

METODOLOGIA

A presente pesquisa pode ser classificada por um estudo exploratório teórico-experimental, pois visa familiarizar-se com o problema, aprimorando ideias e descobertas (GIL, 2002). Logo, propõe-se um levantamento bibliográfico sobre o conceito e aplicações das distribuições normal e binomial de probabilidades e sobre o Teorema Central do Limite, bem como análise de exemplos para o auxílio da compreensão do conteúdo abordado.

Foram feitos estudos sobre a distribuição binomial e a distribuição normal, como modelos discretos e contínuos de probabilidade, respectivamente, bem como seus comportamentos, principais propriedades e aplicações. Foram desenvolvidos ainda conhecimentos sobre o Teorema Central do Limite e de que forma pode-se relacionar, por intermédio dele, as distribuições binomial e normal (DANTAS, 2008; MORGADO et al., 1991; LIMA E MAGALHÃES, 2015; ROSS, 2010, ROSS, 2010).

O projeto das tábuas está sendo feito com o auxílio dos *softwares* de desenho dinâmico AutoCAD e Inventor, programas desenvolvidos e distribuídos pela Autodesk (2018). Serão construídas duas Tábuas de Galton, com diferentes tamanhos, para realização de experimentos probabilísticos com tamanhos de amostras distintas e, por conseguinte, tabular os resultados, calcular as medidas de tendência central e dispersão, e efetuar suas análises.

Por consequência, buscar-se-á propor métodos de refinamento das simulações e do projeto da tábua após a análise dos resultados obtidos.

CONCLUSÕES

Mediante discussões, bem como investigações em pesquisas já realizadas com a Tábua de Galton (AQUINO, 2004; SALGADO-NETO e SALGADO, 2011), mostrou-se de grande relevância a construção de duas Tábuas que diferem no número de canaletas, visto que a distribuição binomial se aproxima da normal à medida que o tamanho da amostra binomial cresce arbitrariamente.

Assim, a primeira Tábua será construída com 12 canaletas e 11 níveis de pregos ou semelhante, pois a discussão ainda está em aberto sobre o obstáculo que a bolinha terá de percorrer. A segunda se constituirá de 21 canaletas e 20 fileiras de pregos. A escolha de a primeira ter um número par de canaletas e a segunda um número ímpar é proposital, pois será analisado o comportamento que a curva assume em uma Tábua com o número de canaletas sendo par e outra ímpar.

O espaçamento entre os obstáculos será discutido no processo de construção das Tábuas, em razão de que a melhor medida deve ser assumida, para que os experimentos se tornem mais precisos. E, não menos importante, o diâmetro escolhido para as bolinhas será de 0,6 cm a princípio, podendo variar.

O desenho da curva normal deve ter parâmetros $\sigma^2 = 2{,}75$ e $\mu = 5{,}5$ para a Tábua com 12 canaletas e $\sigma^2 = 5$ e $\mu = 10$ para a Tábua com 21 canaletas, cálculos estes obtidos pelas fórmulas de variância e média da distribuição binomial. Uma vez definido o número de canaletas das Tábuas, buscar-se-á uma aproximação da binomial à normal.

Após a construção e manipulação dos dispositivos, espera-se verificar experimentalmente que a curva é de fato formada, assim como validar toda a base teórica estudada. Para isso, o modelo teórico será comparado com os resultados obtidos e assim, métodos de refinamento para os dispositivos bem como para os procedimentos do experimento probabilístico, poderão ser propostos.

REFERÊNCIAS

AQUINO, P. M. O. **Estudo da Distribuição Normal por Galton**. UNICAMP, 2004.

AUTODESK. **Autodesk | Software de projeto 3D, engenharia e entretenimento**. 2018. Disponível em: <https://www.autodesk.com.br/>. Acesso em: 31 jul. 2018.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório** - 3 ed. São Paulo: EDUSP, 2008.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, v. 5, n. 61, p. 16-17, 2002.

LIMA. C., MAGALHÃES, M. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 7 ed. São Paulo: EDUSP, 2015.

MORGADO, A. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ROSS, S. **Introduction to Probability Models**. 10th ed. Amsterdam: Academic Press, 2010.

ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SALGADO NETO, G.; SALGADO, A. Sir Francis Galton e os extremos superiores da curva normal. **Revista de Ciências Humanas** (UFSC) v. 45, p. 223-239, 2011.

ZUCCONI, Alan. **Understanding the Gaussian distribution**. 2015. Disponível em: <https://www.alanzucconi.com/2015/09/09/understanding-the-gaussian-distribution/>. Acesso em: 31 jul. 2018.