III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018

Alguns resultados sobre as Cadeias de Markov e interação de conceitos da Álgebra Linear e a Teoria das Probabilidades

MATHEUS MACHADO GARCIA[1], VITOR GUSTAVO DE AMORIM [2], KARLA BARBOSA DE FREITAS SPATTI [3]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, Bolsista PIBIFSP, IFSP Campus Araraquara, machado.garcia@aluno.ifsp.edu.br.
[2] Docente, IFSP Câmpus Araraquara, vitoramorim@ifsp.edu.br
[3] Docente, IFSP, Câmpus Araraquara, karla.freitas@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Processos Markovianos – 1.02.01.04-1

RESUMO: Entre as competências necessárias para a formação do licenciado em Matemática, está a capacidade de articulação entre tópicos matemáticos de diferentes áreas de estudo e pesquisa para aplicação na modelagem e resolução de problemas. Tal habilidade proporciona ao futuro professor-pesquisador uma ampliação da visão geral das áreas de pesquisa da Matemática e favorece o desenvolvimento de processos de ensino-aprendizagem no ensino básico, na medida em que amplia as possibilidades de contextualização dos temas matemáticos da escola básica, de aplicação de modelagem matemática como metodologia de ensino, do desenvolvimento de projetos interdisciplinares e de articulação de temas escolares aparentemente desconexos. Nesse contexto, o estudo das Cadeias de Markov e suas aplicações, articula tópicos da Álgebra Linear, da Teoria das Probabilidades e da Análise Real, cujos fundamentos estão presentes no currículo do ensino básico, possibilitando uma abordagem inicial do tema. Dessa forma, este trabalho apresenta, desenvolve e sistematiza alguns resultados teóricos sobre as Cadeias de Markov, especialmente resultados deixados por vezes subentendidos na literatura. Em particular, é demonstrado um resultado contra intuitivo a respeito da convergência de uma cadeia de Markov cuja matriz de transição é duplamente estocástica.

PALAVRAS-CHAVE: cadeias de Markov, matrizes estocásticas; matriz de transição; sequência de matrizes e vetor de estado estacionário.

INTRODUÇÃO

As Cadeias de Markov têm aplicações na modelagem e resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico, como Física, Química, Biologia, Geografia, Informática, Logística, Estatística, Economia, Jogos, Música, Ciências Sociais, Esportes entre outras (ANTON, RORRER, 2012; LEON, 2014; ROSS, 2010). O estudo deste tema traz a possibilidade de integração entre a Álgebra Linear e a Teoria das Probabilidades, lidando diretamente com temas como diagonalização de matrizes, sequências reais e de matrizes e seus limites, álgebra de matrizes, entre outros.

A motivação para o estudo das Cadeias de Markov surge pelas inúmeras aplicações em situações problemas reais, o que traz a possibilidade de estudo e aplicação caso a caso, bem como generalizações, de técnicas a resultados dos tópicos e das áreas pesquisa citadas acima. Além disso, o tema traz inúmeras possibilidades de interação entre três áreas (Álgebra Linear, Análise Real e Teoria das Probabilidades) que são aparentemente desconexas, proporcionando uma abordagem integrada de diversos conceitos aplicada à modelagem e resolução de problemas.

Neste trabalho são discutidos conceitos tanto da Álgebra Linear, como os autovalores, autovetores, diagonalização de matrizes, matriz inversa e sequências de matrizes, propriedades de limites, como em Teoria das Probabilidades, onde utilizamos os conceitos e propriedades da Probabilidade Condicional. Além disso, utiliza-se ainda ferramentas da Análise Real, por meio de um estudo mais preciso das definições de sequências de matrizes e seus respectivos limites.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é explorar e analisar os resultados já estabelecidos na teoria das cadeias de Markov, identificando a partir daí possibilidades de aplicação na modelagem e resolução de problemas e, adicionalmente, possibilidades de redação e desenvolvimento matemático (e didático) de resultados subentendidos nas demonstrações encontradas nas principais referências estudadas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico, as Cadeias de Markov encontram aplicação na modelagem e resolução de problemas (ANTON, RORRER, 2012; ROSS,2010). A variedade e abrangência das áreas já citadas se justifica porque uma Cadeia de Markov pode ser utilizada para modelar qualquer experimento que apresenta um sistema com possibilidades de mudanças de estados, em tempo discreto, no qual pode ser determinada uma probabilidade (constante) de o sistema atingir certo estado, condicionada apenas ao estado anterior do sistema (ROSS,2010). Tal situação é encontrada frequentemente em diversos problemas de transição aleatória em inúmeras áreas de conhecimento (LEON,2014).

Em termos matemáticos, estamos considerando um sistema onde seu estado em um determinado tempo discreto n pode ser dado por uma variável aleatória X_n, que assume um número finito de valores $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, e para a qual a probabilidade de o sistema atingir o estado $X_{n+1} = x_\ell$, $1 \leq \ell \leq k$, (no tempo seguinte), depende apenas do estado atual X_n, ou seja, independe dos anteriores. Em outras palavras:

$$P\left(X_{n+1} = x_\ell \,\middle|\, \left(X_n = x_{\ell_n}, X_{n-1} = x_{\ell_{n-1}}, \dots, X_0 = x_{\ell_0}\right)\right) = P(X_{n+1} = x_\ell | X_n = x_{\ell_n}) \quad (1)$$

A propriedade (1) descrita acima é chamada de propriedade markoviana, ou memória markoviana. Uma sequência (X_n) de variáveis aleatórias que assume um número finito de estados $\{1,2,\dots,k\}$ e cuja distribuição conjunta de probabilidades satisfaz a propriedade markoviana, é chamada de Processo ou Cadeia de Markov (ROSS, 2010, pg 496).

Dessa forma, um sistema que assume apenas dois estados 1 e 2, por exemplo, tem as probabilidades de transição do tempo n para o tempo $n+1$ descritas por quatro números: a probabilidade de estar no estado 1 e permanecer nele $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)$, a probabilidade de estar no estado 1 e mudar para 2 $P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1)$ e assim sucessivamente. Assim, representando a probabilidade de o sistema estar no estado i mudar para o estado j, $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ por p_{ij}, obtemos uma matriz quadrada de ordem 2 com todas as probabilidades que descrevem o sistema na mudança de estado do tempo de n para $n+1$, na qual a soma dos termos de cada linha deve ser 1.

Analogamente, dado um sistema que assume os estados $1, \dots, k$, podemos obter uma matriz quadrada de probabilidades de ordem k, onde cada termo p_{ij} representa a probabilidade de o sistema assumir o estado j, dado que estava no estado i. Tal matriz é chamada de matriz de transição da cadeia de Markov e cada probabilidade p_{ij} é chamada probabilidade de transição do estado i para o estado j (ANTON, RORRER, 2012; LEON,2014).

É possível mostrar que se $P = [p_{ij}]$ é a matriz de transição de uma cadeia de Markov, então a matriz P^n será a matriz de transição após n unidades de tempo, ou seja, após n iterações do sistema. Além disso, sob certas condições, demonstra-se a existência de uma condição suficiente para que P^n seja convergente para uma matriz Q que possui todas as linhas iguais e na qual o vetor linha constante é chamado de vetor de estado estacionário. Esse nome se justifica porque, se a citada condição for satisfeita, as probabilidades do sistema se encontrarem no estado j, convergem para um número fixo, independente do estado inicial (ANTON, RORRER, 2012).

METODOLOGIA

O presente trabalho pode ser classificado por um estudo exploratório pois visa familiarizar-se com o problema, aprimorando ideias e descobertas (GIL, 2002). Foram desenvolvidos um levantamento bibliográfico sobre o conceito e as aplicações de Cadeias de Markov, análise de exemplos para o auxílio da compreensão do conteúdo abordado, e também um estudo sobre conceitos e resultados estabelecidos.

Como pré-requisitos para a pesquisa, foram feitos estudos dos conceitos de probabilidade condicional e da Álgebra Linear tais como autovalores, autovetores, diagonalização de matrizes, potência de matrizes entre outros. Para isso, exercícios de aprofundamento foram realizados e também foram desenvolvidos conceitos e principais resultados relacionados às cadeias de Markov, bem como problemas de aplicação propostos na literatura para o auxílio no entendimento do assunto tratado. Para esses estudos e pesquisas, foram utilizadas as referências (DANTAS, 2008), (LIMA, 2015), (LEON, 2014), (ANTON, RORRER, 2012) e (MORGADO, 1991).

Durante o desenvolvimento do trabalho, foram identificados vários conceitos e propriedades relativas às sequências de matrizes, diagonalização e cadeias de Markov, cujo enunciado e demonstração estavam ocultos ou propostos como complementos nos livros consultados na referência (LEON, 2014).

Assim, foram redigidos e demonstrados uma sequência de definições, enunciados e demonstrações desses resultados fundamentais para o entendimento e sistematização completa do tema abordado. Alguns desses resultados são detalhados neste trabalho.

RESULTADOS

Enunciaremos a seguir alguns dos resultados adaptados e/ou desenvolvidos como complementos a partir dos textos contidos em (LEON, 2014) e (ANTON, RORRER, 2012). Todas as definições, enunciados e demonstrações redigidas estão no trabalho completo e algumas delas serão apresentadas durante o evento.

Resultado 1: Uma matriz quadrada A é dita estocástica se todas as suas entradas são não negativas e soma dos elementos de cada coluna é igual a 1. Um vetor de probabilidades é um vetor (ou matriz coluna) cujas entradas são não negativas e têm soma 1. Dados uma matriz estocástica A de ordem m e $\underline{x}$ um vetor de probabilidades m-dimensional, então:

$i)$ $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ é um vetor de probabilidades;

$ii)$ $\underline{x_n} = A^n \cdot \underline{x}$ é um vetor de probabilidades para todo $n \geq 0$;

$iii)$ Se $\underline{e} = \lim_{n\to\infty} \underline{x_n}$ existe, então $\underline{e}$ é um vetor de probabilidades.

Demonstração:

$i)$ Sejam $A = (a_{ij})$, $\underline{x} = (x_i)$ e $\underline{y} = (y_i)$, com $1 \leq i, j \leq m$. Então:

$$\underline{y} = A \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m \end{bmatrix}$$

Das hipóteses segue que $a_{ij}, x_i \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq m$ e, portanto, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq m$. Ou seja, $\underline{y}$ tem todas as suas entradas não negativas. Além disso:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}x_j + \cdots + \sum_{j=1}^{m} a_{mj}x_j = x_1\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\right) + \cdots + x_m\left(\sum_{i=1}^{m} a_{im}\right) = x_1 + \cdots + x_m = 1$$

onde a terceira igualdade segue do fato de A ser estocástica e a quarta de $\underline{x}$ ser um vetor de probabilidades. Portanto, $\underline{y}$ é um vetor de probabilidades.

$ii)$ Tome $\underline{x_0} = \underline{x}$. Então, segue do item anterior que $\underline{x_k} = A \cdot \underline{x_{k-1}}$ é um vetor de probabilidades para todo $k \geq 0$. Logo, aplicando indução sobre n, temos que $\underline{x_n} = A^n \cdot \underline{x_0}$ é um vetor de probabilidades para todo $n \geq 0$.

$iii)$ Sejam $\underline{e} = (e_i)$ e $\underline{x_n} = \left(x_{n_i}\right)$, com $1 \leq i \leq m$. Do item anterior, sabemos que $\underline{x_n}$ é um vetor de probabilidades, ou seja $x_{n_i} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{m} x_{n_i} = 1$. Logo, segue da hipótese que:

$$e_i = \lim_{n\to\infty} x_{n_i} \geq 0, \qquad \forall 1 \leq i \leq m \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} e_i = \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} x_{n_i} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{n_i}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad (2)$$

Portanto, segue de (1) e (2) que $\underline{e}$ é um vetor de probabilidades.

Resultado 2: Considere uma sequência de matrizes $(A_n)_{n\geq 1}$ de ordem $m \times p$, ou seja, cada entrada da matriz A_n é formada por uma sequência real $\left(a_{ij}\right)_n$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$. Definimos $\lim_{n\to\infty} A_n$ como sendo a matriz $L_{m\times p}$ dada por $\left(l_{ij}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(a_{ij}\right)_n\right)$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$, caso os limites existam. Em outras palavras, a matriz limite $L_{m\times p}$ é a matriz dos limites das entradas de A_n. Sejam A_n uma sequência de matrizes quadradas de ordem m, $\underline{x}$ um vetor m-dimensional fixo e B uma matriz quadrada de ordem m qualquer. Nessas condições, valem:

i) Se $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe, então $\lim_{n\to\infty}\left(A_n.\underline{x}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot \underline{x}$. Analogamente, vale $\lim_{n\to\infty}\left(\underline{x}^T \cdot A_n\right) = \underline{x}^T \cdot \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$;

ii) Se $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe, então $\lim_{n\to\infty}(A_n.B) = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot B$. Analogamente, vale $\lim_{n\to\infty}(B \cdot A_n) = B \cdot \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$

Demonstração:

i) Seja $\underline{x} = (x_i)$ com $1 \leq i \leq m$. Então pela hipótese de existência dos limites das entradas de A_n e utilizando a notação dada no enunciado, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_n.\underline{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\begin{bmatrix} a_{11_n} & \cdots & a_{1m_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1_n} & \cdots & a_{mm_n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m\end{bmatrix}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\begin{bmatrix} a_{11_n}x_1 + \cdots + a_{1m_n}x_m \\ \vdots \\ a_{m1_n}x_1 + \cdots + a_{mm_n}x_m\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}x_1 + \cdots + l_{1m}x_m \\ \vdots \\ l_{m1}x_1 + \cdots + l_{mm}x_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mm}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m\end{bmatrix} = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot\underline{x}$$

A demonstração da segunda afirmação feita em i) é análoga.

ii) Denotaremos por $\underline{x_j}$ o vetor formado pela coluna j de uma matriz qualquer $X = (x_{ij})$. Assim, utilizando o resultado obtido acima, temos:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n.B) = \lim_{n\to\infty}\left(\left[A_n\cdot\underline{b_1} \quad \ldots \quad A_n\cdot\underline{b_m}\right]\right) = \left[\lim_{n\to\infty}\left(A_n\cdot\underline{b_1}\right) \quad \ldots \quad \lim_{n\to\infty}\left(A_n\cdot\underline{b_m}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot\underline{b_1} \quad \ldots \quad \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot\underline{b_m}\right] = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot\left[\underline{b_1} \quad \ldots \quad \underline{b_m}\right] = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\cdot B$$

A demonstração da segunda afirmação feita em i) é análoga.

Resultado 3:. Uma matriz A é dita *duplamente estocástica* se tanto A quanto A^T são estocásticas. Seja $A_{m\times m}$ uma matriz duplamente estocástica, diagonalizável e cujos autovalores satisfazem $\lambda_1 = 1$ e $\left|\lambda_j\right| < 1$ para $2,3,\ldots,m$ (ou seja, 1 é autovalor dominante da matriz). Considere o vetor $\underline{1} \in \mathbb{R}^m$ cujos elementos são todos iguais a 1. Então a cadeia de Markov determinada por A convergirá para o vetor de estado estacionário $\underline{e} =$

$\frac{1}{m}\underline{1}$ independente do vetor inicial $\underline{x_0}$. Em outras palavras, para uma matriz de transição duplamente estocástica com autovalor dominante igual a 1, o vetor de estado estacionário fornecerá probabilidades iguais a todos os estados possíveis.

Demonstração: Sabemos que o vetor de estado estacionário da cadeia é dado por:

$$\underline{e} = \lim_{n\to\infty}\left(A^n.\underline{x_0}\right)$$

Por outro lado, como A^T é estocástica e λ_1=1 é autovalor de A, então $\underline{1}$ é autovetor associado a λ_1, pois:

$$A\cdot\underline{1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+\cdots+a_{1m} \\ \vdots \\ a_{m1}+\cdots+a_{mm}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} = 1\cdot\underline{1}$$

Assim, podemos tomar uma matriz X diagonalizante de A com a primeira coluna igual a $\underline{1}$ (ANTON, RORRER, 2012, pg. 305) . Além disso, podemos escrever $A^n = XD^nX^{-1}$, onde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2m} & \dots & x_{mm} \end{bmatrix} \quad e \quad D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m^n \end{bmatrix}$$

Da hipótese que $|\lambda_j| < 1$ para $2,3,\dots,m$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}(D^n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $X^{-1}.\underline{x_0} = \underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$. Podemos então escrever o vetor estacionário da seguinte forma:

$$\underline{e} = \lim_{n\to\infty}\left(X\cdot D^n\cdot X^{-1}\cdot\underline{x_0}\right) = X\cdot\lim_{n\to\infty}(D^n)\cdot\underline{k} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2m} & \dots & x_{mm} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_1 \end{bmatrix}$$

Como $\underline{e}$ é um vetor de probabilidades, segue que $\underbrace{k_1+k_1+\cdots+k_1}_{m\ parcelas} = 1 \Rightarrow k_1.m = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{m}$.

Logo, $\underline{e} = \begin{bmatrix} 1/m \\ 1/m \\ \vdots \\ 1/m \end{bmatrix}$.

CONCLUSÕES

As Cadeias de Markov constituem uma ferramenta interdisciplinar da Álgebra Linear e da Probabilidade, também com aplicações de conceitos de Análise Real, que podem modelar problemas em que uma determinada variável assume um número finito de estados, como por exemplo, a intenção de voto no segundo turno, dia após dia ao se aproximar do pleito, onde os estados possíveis são candidato A, B ou nenhum. Caso seja possível assumir que a transição do estado atual para o estado no tempo seguinte (em tempo discreto), é um processo aleatório no qual a probabilidade de transição em cada caso seja constante e dependa apenas do estado anterior, o fenômeno em questão pode ser modelado por uma cadeia de Markov.

As matrizes de transição, que contém as probabilidades de transição para todos os estados, em alguns contextos, podem conter linhas e colunas com números positivos cuja soma é 1. Nesse caso, o Resultado 3 traz uma consequência contra intuitiva: independente do estado inicial do sistema, ou seja, independente da proporção (ou probabilidade) atribuída inicialmente a cada estado possível, cumpridas as condições dadas, a cadeia converge a longo prazo para um vetor cuja probabilidade é igual para cada um dos estados. No exemplo dado acima, assumidas as condições, mesmo que a situação inicial fosse de 1% para o candidato A, 90% para o candidato B e 9% para nenhum dos dois, a longo prazo, as iteradas transições levariam à proporção de $\frac{1}{3} \cong 33\%$ para cada escolha.

Considerando o contexto e os resultados apresentados acima, conclui-se que o estudo introdutório das Cadeias de Markov se apresenta como uma excelente oportunidade para desenvolver atividades de ensino e aprendizagem que promovem a articulação entre áreas da Matemática, como a Álgebra Linear e a Probabilidade, e também a interdisciplinaridade e a contextualização da disciplina por meio das aplicações em diferentes áreas do conhecimento.

As experiências obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho contribuíram para o aprendizado de um conteúdo não abordado no ensino superior e proporcionaram a oportunidade de produção de conteúdo matemático formal, visto que um dos objetivos da pesquisa foi identificar e preencher lacunas de resultados subentendidos nos textos usados como referência.

Como continuação deste trabalho, outros resultados importantes para o auxílio no aprendizado deste tema ainda serão demonstrados e um texto didático com a sistematização sequencial de todos os tópicos desenvolvidos, conceitos enunciados e demonstrados ainda será elaborado. Além disso, será realizado um levantamento de pequenos problemas ainda não solucionados com a teoria de Cadeias de Marcov, porém que apresentam características necessárias para sua aplicação, passíveis de resolução desse modo e a solução de um desses problemas será desenvolvida.

REFERÊNCIAS

ANTON, H., RORRER, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

DANTAS, C. A. B**. Probabilidade: um curso introdutório -** 3 ed. São Paulo: EDUSP, 2008.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, v. 5, n. 61, p. 16-17, 2002.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com aplicações.** 8ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

LIMA. C., MAGALHÃES, M. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 7 ed. São Paulo: EDUSP, 2015.

MORGADO, A. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ROSS, S. **Introduction to Probability Models**. 10th ed. Amsterdam: Academic Press, 2010.

ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.