III Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
III EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
19 e 20 de Setembro de 2018

SISTEMA DE TABLEAUX APLICADO À LÓGICA TRIVALENTE E INTUICIONISTA I^1

ELIAS OLIVEIRA VIEIRA DOS SANTOS[1], LUIZ HENRIQUE DA CRUZ SILVESTRINI[2]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP Campus Bauru, elias.ov.santos@fc.unesp.br.
[2] silvestrini@fc.unesp.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Lógica Matemática - 1.01.01.03-9

RESUMO: O cálculo I^1 foi introduzido em 1995 por Sette e Carnielli. Este sistema possui um caráter intuicionista, no mesmo sentido do sistema lógico desenvolvido por Arend Heyting (1898-1980), o qual surgiu como a lógica subjacente a Matemática Intuicionista, ou construtivista, de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Ademais, o cálculo I^1 é uma lógica tri-valorada que, ao contrário da lógica clássica, não admite apenas dois valores de verdade, mas sim três, estes são T, F* e F. Os valores T e F denotam, respectivamente, verdade e falsidade, enquanto que F* pode ser interpretado como "falsidade por falta de evidência positiva". O objetivo desta pesquisa de iniciação científica, que está em fase inicial, tem por finalidade desenvolver um método dedutivo alternativo ao axiomático para a lógica intuicionista I^1, propõe-se, então, desenvolver um sistema de tableaux analíticos para tal lógica e discutir sobre os benefícios deste método de dedução em relação ao método axiomático.

PALAVRAS-CHAVE: LÓGICAS NÃO CLÁSSICAS; MÉTODO DE PROVA; TABLEAUX ANALÍTICOS.

INTRODUÇÃO

A lógica clássica é a classe de lógica matemática que mais foi estudada e utilizada. Tal lógica é compreendida pelo cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais, com características a obediência aos princípios lógicos clássicos.

O número de aplicações para a lógica clássica é enorme, porém, em alguns casos ela não é adequada. E para esses casos surgiram as lógicas não-clássicas, como a I^1 que foi escolhida para ser trabalhada nesta pesquisa.

Neste trabalho, adotamos o termo original do francês tableaux, por esta razão utilizaremos duas formas de escrita, a saber, tableau quando nos referirmos ao singular e tableaux para o uso no plural. Por exemplo, um tableau e os tableaux.

O objetivo deste trabalho será introduzir a lógica trivalente e intuicionista I^1 através do método dedutivo por tableaux analíticos. Para isso, serão explicitadas as regras de expansão do nosso tableau TI1. Ademais, discutiremos os benefícios do método de dedução por tableaux como alternativa ao axiomático.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Mortari (2001, p. 352), a Lógica Clássica tem entre características a obediência aos seguintes princípios lógicos clássicos, também chamados de "leis fundamentais do pensamento":

i) Princípio da reflexividade da identidade: todo objeto é idêntico a si próprio.

ii) Princípio da não-contradição: dada uma proposição e sua negação, ao menos uma delas é falsa $\neg (A \wedge \neg A)$.

iii) Princípio do terceiro excluído: dada uma proposição e sua negação, ao menos uma delas é verdadeira $(A \vee \neg A)$.

iv) Princípio da bivalência: toda proposição é ou verdadeira ou falsa.

As lógicas não-clássicas, que surgiram para os casos em que a lógica clássica não é adequada, se dividem em dois grupos:

a) Lógicas complementares: elas têm como objetivo estender a lógica clássica.

b) Lógicas alternativas: essas têm como objetivo substituir a lógica clássica.

Para Carnielli e Lima-Marques (1999), uma lógica é dita polivalente (multi-valorada) se admite mais de dois valores de verdade, como consequência, tal lógica derroga o princípio clássico da bivalência.

A lógica I^1, uma lógica de caráter intuicionista e trivalente, apresenta além dos valores de verdade clássicos T e F, o valor de verdade F*, que pode ser interpretado como "falsidade por falta de evidencia positiva". No ambiente semântico desta lógica, somente o valor T é distinguido. Este sistema foi introduzido por Sette e Carnielli (1995) e possui um caráter intuicionista no sentido de, por exemplo, $\neg\neg A \rightarrow A$ não ser uma tautologia em I^1. Neste sistema todos os axiomas do sistema de Heyting para a lógica intuicionista são válidos, e a lei do terceiro excluído não é válida a partir da definição de disjunção daquele sistema.

I^1 pode ser caracterizada, axiomaticamente, da seguinte forma:

I^1-1 $\quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$

I^1-2 $\quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

I^1-3 $\quad (\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$

I^1-4 $\quad \neg\neg (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

FIGURA 1. Axiomas da lógica I^1.
Fonte: CARNIELLI e LIMA-MARQUES, 1999

E a *Modus Ponens* ($A, A \rightarrow B \vdash B$) é a única regra de inferência do sistema.

A lógica intuicionista, conforme vista em Mortari (2001), é a lógica da Matemática Intuicionista, e o Intuicionismo, uma corrente dentro da Matemática originada por L. E. J. Brouwer (1981-1966). A diferença entre os matemáticos clássicos e os intuicionistas com relação a matemática poderia ser colocada, a grosso modo, como a diferença entre descobrir e inventar; onde um matemático clássico (também chamado de platonista) acredita que os objetos matemáticos existem independente dos seres humanos; neste sentido, a atividade de um matemático consiste em descobrir que propriedades tem esses objetos, que leis valem a respeitos deles, como se existisse um "mundo da matemática". Já o matemático intuicionista os objetos matemáticos vão sendo criados pelos seres humanos, sendo a matemática uma atividade mental e os objetos matemáticos construções mentais, não existindo de maneira independente.

Assim sendo, um intuicionista só aceita demonstrações de existência de objetos matemáticos por construção, não aceitando demonstrações por redução ao absurdo, muito usadas na Matemática Clássica, onde se demonstra que muitas coisas existem porque sua inexistência implicaria numa contradição.

Assim, uma das propriedades que a lógica intuicionista rejeita é o principio da dupla negação: $\neg\neg A \rightarrow A$ não é válida intuicionisticamente.

O sistema dos tableaux, visto em Bispo (2012), também conhecido como árvores de refutação, é um método de dedução indireta, ou redução ao absurdo, utilizado para verificar a validade de um argumento. Dado um argumento, acrescenta-se a negação da conclusão como uma nova premissa, que se torna, juntamente com as premissas iniciais, a *raiz* do tableau. A partir daí, desenvolvem-se os *ramos* da árvore utilizando as *regras de expansão*, até que em cada ramo só reste uma proposição simples ou a negação dela. Um *ramo* do tableau é *fechado* quando contém uma proposição e sua negação e, é chamado de ramo *aberto* caso contrário. Ao terminar a ramificação/expansão do tableau, se todos os ramos *terminados* forem fechados, dizemos que o argumento é considerado válido. Um tableau também pode ser definido como uma árvore ordenada diádica.

METODOLOGIA

Trata-se de um trabalho teórico, para o qual é desenvolvido um rigoroso e aprofundado estudo dos textos propostos nas Referências. A presente pesquisa visa estabelecer a lógica I^1, desenvolvida por A. Heyting, por meio do método dedutivo por tableaux, demonstrando a adequação (Corretude e Completude) entre os dois sistemas; além disso, busca reconhecer o método dos tableaux como um método alternativo ao axiomático.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Serão estabelecidas nesta apresentação as cláusulas de fechamento e as regras de expansão para nosso sistema de tableaux TI1.

Segue abaixo algumas regras de expansão para o sistema TI1, criadas a partir das tabelas-verdades dos conectivos conjunção, disjunção e condicional de I^1 apresentadas por Carnielli e Lima-Marques (1999):

TABELA 1. Tabela-Verdade da Conjunção da lógica I^1.
Fonte: CARNIELLI e LIMA-MARQUES, 1999.

$\wedge_{I^1}$	T	F*	F
T	T	F	F
F*	F	F	F
F	F	F	F

Para o caso do nosso TI1, 1 representa T, ½ representa F* e 0 representa F:

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ 1A \\ | \\ 1B \end{array}$$

FIGURA 2. Regra de Expansão de TI1 para conjunção.

TABELA 2. Tabela-Verdade da Disjunção da lógica I^1.
Fonte: CARNIELLI e LIMA-MARQUES, 1999.

$\vee_{I^1}$	T	F*	F
T	T	T	T
F*	T	F	F
F	T	F	F

A partir da matriz acima, introduzimos a seguinte regra de expansão para disjunção:

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1A & & 1B \end{array}$$

FIGURA 3. Regra de Expansão de TI1 para disjunção.

TABELA 3. Tabela-Verdade da Condicional da lógica I^1.
Fonte: CARNIELLI e LIMA-MARQUES, 1999.

$\rightarrow_{I^1}$	T	F*	F
T	T	F	F
F*	T	T	T
F	T	T	T

A partir da matriz acima, introduzimos a seguinte regra de expansão para o condicional:

$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ \swarrow & \mid & \searrow \\ 0A & \tfrac{1}{2}A & 1B \end{array}$$

FIGURA 4. Regra de Expansão de TI1 para Condicional.

CONCLUSÕES

Trata-se de um trabalho em andamento e a partir das regras de expansão do sistema de tableaux TI1 serão demonstrados que os axiomas de I^1 possuem respectivos tableaux fechado.

AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências / Unesp de Bauru.

REFERÊNCIAS

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. **Introdução à Lógica Matemática**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

CARNIELLI, W. A.; LIMA-MARQUES, M. Society semantics for multiple-valued logics. In W.A. Carnielli and I.M.L. D'Ottaviano, editors, **Advances in Contemporary Logic and Computer Science**, volume 235 of Contemporary Mathematics Series, pp. 33-52. American Mathematical Society, 1999.

MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A. Maximal Weakly-intuicionistic logics, **Studia Logica** 55, 1995, pp. 181-203.