



IV Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica  
IV EnICT  
ISSN: 2526-6772  
IFSP – Câmpus Araraquara  
24 e 25 de Outubro de 2019



## CONTROLE DE UM LEVITADOR MAGNÉTICO UTILIZANDO REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

VINÍCIUS RICARDO DA SILVA<sup>1</sup>, LEANDRO JOSÉ ELIAS<sup>2</sup>, TAMIRIS TREVISAN NEGRI BORGES<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia Mecânica, voluntário PIVICT, IFSP Câmpus Araraquara, [vinicius.s@aluno.ifsp.edu.br](mailto:vinicius.s@aluno.ifsp.edu.br).

<sup>2</sup> Professor EBTT, IFSP Câmpus Araraquara, [leandro.elias@ifsp.edu.br](mailto:leandro.elias@ifsp.edu.br).

<sup>3</sup> Professor EBTT, IFSP Câmpus Araraquara, [tamirisnegri@ifsp.edu.br](mailto:tamirisnegri@ifsp.edu.br).

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Sistemas Dinâmicos – 10.10.30.40

**RESUMO:** Este trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica que tem como objetivo investigar ações de controle em um sistema de suspensão magnética. Como as equações do sistema são não lineares, foi obtida uma aproximação linear a partir da expansão em série de Taylor até primeira ordem do modelo não linear. O controle é realizado via realimentação de estados com realocação dos autovalores do sistema. Também foi realizada a simulação numérica em *MATLAB* do sistema realimentado.

**PALAVRAS-CHAVE:** linearização; modelagem matemática; realimentação de estados; sistemas não lineares.

### INTRODUÇÃO

Sistemas de suspensão magnética podem ser utilizados para introduzir e motivar o estudo de controladores de sistemas dinâmicos (HURLEY; WOLFLE, 1997; OLIVEIRA; AGUIAR; VARGAS, 2016). Além disso, a levitação magnética têm diversas aplicações em sistemas físicos, tais como em transportes terrestres de alta velocidade, no controle de vibrações de sistemas mecânicos e em bioengenharia (GOLOB; TOVORNİK, 2003).

É possível encontrar na literatura diferentes modelos matemáticos para um levitador magnético (OLIVEIRA; COSTA; VARGAS, 1999; CARDIM et al., 2007; ELIAS et al., 2016; BELTRÁN; RAMÍREZ; GUAYAZAN, 2018). Como as equações que descrevem o sistema do levitador magnético são não lineares, é necessário obter uma representação linear próximo ao ponto de equilíbrio. Desse modo, a estabilidade do sistema próximo ao ponto de equilíbrio pode ser investigada (OGATA, 2010; MONTEIRO, 2011; BOYCE; DIPRIMA, 2015) e ações de controle podem ser aplicadas no sistema (CHEN, 1999; OGATA, 2010).

Este trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica em execução. A partir de um modelo de um levitador magnético (OLIVEIRA; AGUIAR; VARGAS, 2016; BELTRÁN; RAMÍREZ; GUAYAZAN, 2018) são obtidas as equações espaço de estado do sistema. A controlabilidade do sistema é verificada e o controle é realizado via realimentação de estados (CHEN, 1999; DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2010). Também é realizada a simulação numérica, em *MATLAB*, do sistema realimentado e os resultados são ilustrados graficamente. Uma breve discussão dos resultados obtidos é realizada na conclusão, assim como são propostos tópicos a serem investigados.

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em geral, as equações de um sistema não linear podem ser aproximadas por equações lineares em determinadas regiões do espaço de soluções. Um modelo linear aproximado pode ser obtido a partir da expansão em série de Taylor até primeira ordem em torno de um ponto de equilíbrio do sistema (MONTEIRO, 2011;

BOYCE; DIPRIMA, 2015) e escrito na forma espaço de estados (CHEN, 1999; MONTEIRO, 2011; OGATA, 2010) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz do sistema,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  é matriz de entradas,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de entradas,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de saída,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  é a matriz de saída e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  é uma matriz de alimentação direta. Assuma que  $\mathbf{D}$  é a matriz nula e  $\mathbf{C}$  a identidade de ordem  $n$ . Essa representação será utilizada no controle do sistema de levitação magnética, descrito a seguir.

O levitador magnético consiste de uma bola de metal que deve ser mantida através do equilíbrio entre a força gravitacional e a força eletromagnética a uma distância  $y_0$  da bobina, conforme mostra a Figura 1. É possível encontrar na literatura diferentes modelos matemáticos que descrevem esse sistema (OLIVEIRA; COSTA; VARGAS, 1999; CARDIM et al., 2007; OLIVEIRA; AGUIAR; VARGAS, 2016; ELIAS et al., 2016; BELTRÁN; RAMÍREZ; GUAYAZAN, 2018). O modelo considerado neste trabalho utiliza as equações:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg + f(y, i) \quad \text{e} \quad v = Ri + \frac{d(L(y)i)}{dt}, \quad (2)$$

em que  $f(y, i) = \frac{-L_0 i^2}{2a \left(1 + \frac{y}{a}\right)^2}$  é a força eletromagnética [N],  $i$  é a corrente na bobina [A],  $v$  é a tensão aplicada [V],  $L(y)$  a indutância [H],  $L_0$  a indutância da bobina no ponto de operação,  $R$  a resistência da bobina [ $\Omega$ ] e  $a$  é uma constante [m]. Assuma ainda que  $L$  é uma constante que aproxima  $L(y)$  no ponto de equilíbrio  $(y_e, \dot{y}_e, i_e)$ . No equilíbrio  $mg = -f(y_e, i_e)$  fornecendo para  $L$  constante  $i_e = \sqrt{\frac{mg2a}{L_0}} \left(1 + \frac{y_e}{a}\right)^2$ .

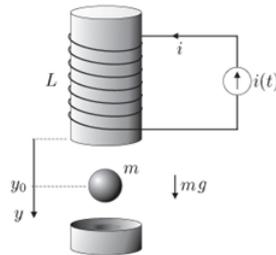


Figura 1: Levitador Magnético.

Fonte: arquivo pessoal.

## METODOLOGIA

Para realizar a ação de controle no sistema de suspensão magnética é necessário descrever as equações que modelam o sistema na forma espaço de estados. Desse modo, são definidas novas variáveis de estado  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  e  $x_3 = i$ . Derivando as novas variáveis de estado, as equações do sistema ficam:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = g + \frac{-L_0}{2am} \frac{x_3^2}{\left(1 + x_1/a\right)^2}, \\ \dot{x}_3 = -\frac{Rx_3}{L} + \frac{v}{L}, \end{cases} \quad (3)$$

onde a tensão  $v$  é tomada como entrada de controle. Como o sistema (3) é não linear, foi tomada uma aproximação utilizando o polinômio de Taylor expandido até a primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio do sistema. Assim, a representação espaço de estados obtida foi

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{aL_0 i_e^2}{m(a+y_0)^3} & 0 & \frac{-aL_0 i_e}{m(a+y_0)^2} \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v, \quad (4)$$

onde  $z_i = x_i - x_{ie}$  para  $i = 1, 2, 3$  e  $P_e = (x_{1e}, x_{2e}, x_{3e})$  é o ponto de equilíbrio.

Para a aplicação das ações de controle é necessário verificar a controlabilidade do sistema (4). Segundo Ogata (2010), o sistema (4) é controlável se a matriz de controlabilidade  $\mathbf{CO} = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$

tem posto  $n$ . O posto de uma matriz é definido como o número de linhas não nulas da sua forma escalonada por linhas ou colunas (ANTON; TORRES, 2012). Assumindo que os estados podem ser medidos em tempo real, não é necessário verificar a observabilidade do sistema.

Após verificar a controlabilidade do sistema, as ações de controle podem ser aplicadas. O controle proposto neste trabalho é realizado via realimentação de estados. A entrada de controle  $v$  é definida por  $v = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$  é a matriz de ganhos do controlador. O sistema realimentado fica  $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t)$ . Esse sistema é assintoticamente estável se a matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  possui autovalores com parte real negativa (CHEN, 1999; MONTEIRO, 2011; OGATA, 2010).

Defina o conjunto  $\mathcal{A} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  como sendo o conjunto formado pelos autovalores desejados para o sistema realimentado. A matriz de ganhos do controlador  $\mathbf{K}$  pode ser obtida pela comparação do polinômio característico da matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  com o polinômio característico obtido pelo conjunto de autovalores desejados  $\mathcal{A}$ . Assim, a matriz  $\mathbf{K}$  é obtida pela expressão:

$$\Delta(\lambda) = \det[(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) - \lambda\mathbf{I}] = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (5)$$

Em *MATLAB* os ganhos do controlador podem ser obtidos utilizando o comando *place*.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os parâmetros considerados para a simulação são: massa ( $m$ ) da esfera metálica de  $22,6 \times 10^{-3}$  [kg], resistência  $R$  da bobina de 19,9 [ $\Omega$ ], indutância ( $L$ ) da bobina de 0,520 [H], indutância ( $L_0$ ) da bobina no ponto de operação de  $2,49 \times 10^{-2}$  [H], posição ( $y_0$ ) da bola no ponto de operação de  $4,5 \times 10^{-3}$  [m] e a constante  $a$  de  $6,72 \times 10^{-3}$  [m]. Assim, a representação espaço de estado do sistema de levitação magnética é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1748,7 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & -38,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,9231 \end{bmatrix} v \quad (6)$$

Verifica-se que os autovalores da matriz que acompanha o vetor  $[z_1 \ z_2 \ z_3]$  associada ao sistema são:  $\lambda_1 = 41.8170$ ,  $\lambda_2 = -41.8170$  e  $\lambda_3 = -38.2692$ . Como um dos autovalores possui parte real positiva, o sistema é instável. A matriz de controlabilidade  $\mathbf{CO}$  obtida foi:

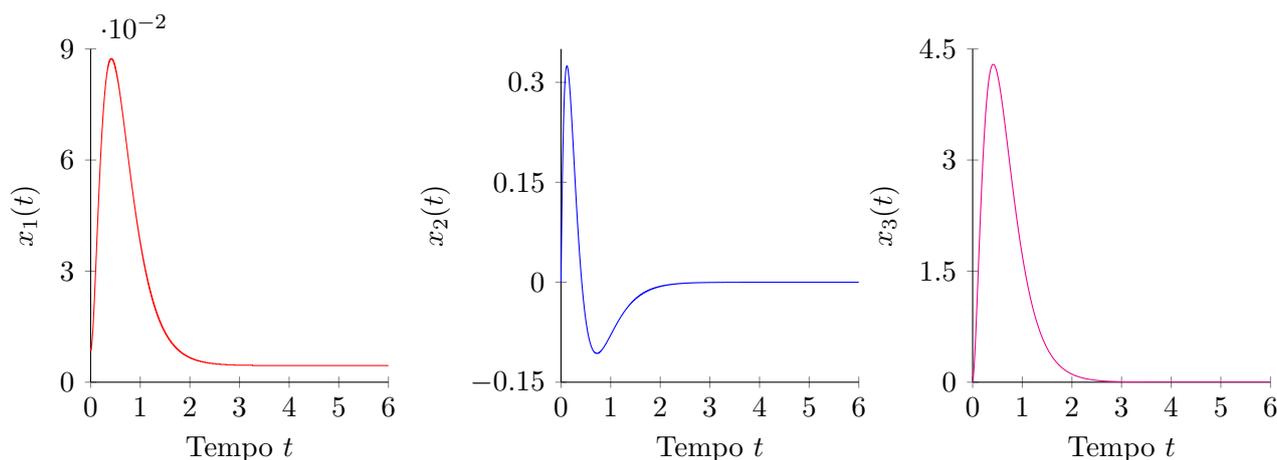
$$\mathbf{CO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -65,3 \\ 0 & -65,3256 & 2500 \\ 1,9231 & -73,5947 & 2816,4 \end{bmatrix},$$

cujo posto é 3 e, portanto, o sistema é controlável. Utilizando o comando *place* e o conjunto de autovalores  $\mathcal{B} = \{-3, -5, -7\}$ , foi obtida a matriz de ganhos  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -403.1336 & -27.8553 & -12.1000 \end{bmatrix}$ .

A Figura 2 ilustra a evolução dos estados no tempo  $t$ , para uma melhor visualização, os estados  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são apresentados separadamente. Verifica-se uma fase transiente do sistema até o tempo aproximado de 3 segundos, logo após o sistema estabiliza no ponto de operação desejado. O estado  $x_1$ , que é a posição da esfera metálica, converge para o valor desejado  $4,5 \times 10^{-3}$ . Já os demais estados  $x_2$  e  $x_3$ , correspondentes a velocidade da esfera metálica e a corrente na bobina, respectivamente, convergem para zero.

## CONCLUSÕES

Os estudos preliminares do levitador magnético apresentados neste trabalho permitiram introduzir alguns conceitos da teoria de controle. Os resultados com a realocação dos autovalores foram satisfatórios como mostram os resultados das simulações realizadas. Contudo é necessário um estudo mais detalhado de outros métodos para obtenção da matriz de ganhos do controlador, tais como a fórmula de Ackermann (OGATA, 2010). Na obtenção da equação espaço de estados foram realizadas simplificações na expressão que descreve a indutância. Outras expressões podem ser verificadas na literatura (BELTRÁN; RAMÍREZ; GUAYAZAN, 2018) e serão investigadas para obtenção de diferentes modelos para o sistema.



**Figura 2:** Resposta no tempo dos estados do sistema para a condição inicial  $x_0 = (0.004, 0, 0)$

## REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; TORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012. 768 p.
- BELTRÁN, J. S. C.; RAMÍREZ, C. F. V.; GUAYAZAN, J. S. H. Comparación de un control lineal y no lineal en un levitador magnético. **Ingenierías**, v. 9, n. 1, p. 112–118, Jun 2018. ISSN 2027-5846.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2015. 663 p.
- CARDIM, R. et al. Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estados da planta. In: **VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. Florianópolis, SC: SBAI, 2007. p. 1–6.
- CHEN, C. T. **Linear system theory and design**. 3. ed. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 724 p.
- ELIAS, L. J. et al. Controle de um levitador magnético com atenuação de distúrbio. In: **Anais do XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**. Gramado, RS: SBMAC, 2016.
- GOLOB, M.; TOVORNIK, B. Modeling and control of the magnetic suspension system. **ISA Transactions**, v. 42, n. 1, p. 89–100, 2003.
- HURLEY, W. G.; WOLFLE, W. H. Electromagnetic design of a magnetic suspension system. **IEEE Transactions on Education**, v. 40, n. 2, p. 124–130, May 1997. ISSN 0018-9359.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2011. 670 p.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2010. 809 p.
- OLIVEIRA, V. A.; AGUIAR, M. L.; VARGAS, J. B. **Engenharia de controle fundamentos e aulas de laboratório**. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2016. 307 p.
- OLIVEIRA, V. A.; COSTA, E. F.; VARGAS, J. B. Digital implementation of a magnetic suspension control system for laboratory experiments. **IEEE Transactions on Education**, v. 42, n. 4, p. 315–322, Nov 1999. ISSN 0018-9359.