IV Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
IV EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
24 e 25 de Outubro de 2019

Equações Horárias do Movimento Fracionárias: Uma Aplicação do Cálculo Fracionário ao MUV

Silas de Sá Cavalcanti[1], Marcelo Andrioli Junior[2], Flávia Milo dos Santos[3], Marco Aurélio Granero[3]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, PIVICT, IFSP - Câmpus São Paulo, silascavalcanti97@gmail.com
[2] Graduando em Licenciatura em Matemática, Bolsista PIBIFSP, IFSP - Câmpus São Paulo, maarcelinhujr@gmail.com
[3] IFSP - Câmpus São Paulo.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Matemática Aplicada – 1.01.04.00-3

RESUMO: Apresenta-se neste trabalho uma introdução ao cálculo de ordem não-inteira ou cálculo fracionário, em especial às formulações de Riemann-Liouville e de Caputo. Estas formulações foram utlizadas na obtenção de uma versão fracionária das equações horárias do movimento uniformemente variado. Nesta aplicação, os resultados mostram que as equações horárias do movimento (tradicionais) podem ser obtidas como um caso limite do cálculo fracionário, evidenciando que este pode ser entendido como uma generalização do cálculo de ordem inteira.

PALAVRAS-CHAVE: Derivada Fracionária; Formulação de Caputo; Formulação de Riemann-Liouville; Integral Fracionária; Movimento Uniformemente Variado.

INTRODUÇÃO

O cálculo de ordem inteira é um campo da matemática que se dedica a estudar fenômenos relacionados a variações e movimento, para isso utiliza-se duas operações: derivação e integração. "A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos", Eves (2004).

O cálculo de ordem inteira surgiu a partir da necessidade da resolução de problemas práticos, que não obrigatoriamente estivessem ligados à matemática, no entanto, o Cálculo Fracionário, por sua vez, surge a partir de um questionamento feito em uma troca de correspondência entre Leibniz e l'Hospital sobre uma generalização da ordem da derivada.

Segundo Camargo e Oliveira (2015), a pergunta feita por l'Hospital a Leibniz sobre uma possível interpretação à derivada de ordem $\frac{1}{2}$ de uma função $y(x)$ é considerada efetivamente o primeiro registro do cálculo fracionário, ou cálculo de ordem arbitrária ou ainda cálculo de ordem não inteira.

Muito provavelmente um dos primeiros trabalhos no Brasil que faz referência ao termo derivada fracionária tenha sido Ricieri (1993). Embora não tenha acontecido no Brasil nenhuma reunião científica dedicada exclusivamente a este tema, de acordo com Camargo e Oliveira (2015), houve algumas reuniões importantes realizadas em universidades brasileiras que trataram sobre este tema, como o *I Encontro Científico de Alunos de Pós-Graduação* na UNICAMP em 2004.

Este trabalho tem como objetivo descrever o processo de construção das equações horárias do movimento através da formulação fracionária segundo as definições de Riemann-Liouville e de Caputo, ilustrando que nos casos limites estas formulações coincidem com o cálculo de ordem inteira, com base no trabalho de Boni (2017), que discute as funções de posição, velocidade e aceleração de uma partícula sob o ponto de vista do cálculo fracionário.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A integral de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, de uma função integrável $f(x)$, pode ser definida como o produto de convolução de Laplace entre $f(x)$ e a função de *Gel'fand Shilov* de ordem n, através do teorema abaixo.

Definição: Função Gel'fand Shilov
Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}$. Define-se a função Gel'fand Shilov, nos casos inteiro e real, respectivamente como

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & se\, t \geq 0 \\ 0 & se\, t < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \phi_\nu(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & se\, t \geq 0\,, \\ 0 & se\, t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Gamma(\nu)$ é a função gama, a generalização da função fatorial.

Teorema: Integral de ordem n
Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}_+$ e $f(t)$ uma função integrável, então

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) := \int_0^t \phi_n(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

O conceito de integral de ordem inteira pode ser generalizado para um número $\nu \in \mathbb{R}$ e, com isso, obter a definição de integral fracionária de ordem ν, Camargo (2014).

Definição: Integral de ordem ν
Seja $f(t)$ uma função integrável. A integral de ordem ν de $f(t)$ é definida e denotada por

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

Samko, Kilbas e Marichev (1993), partindo das Equações (2) e (3), apresentam as definições de integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liovuille em intervalos finitos e suas variações, definindo ainda a classe de funções onde estas são aplicáveis, bem como algumas de suas propriedades em espaços de funções contínuas e contínuas por partes.

Integrais fracionárias de Riemann-Liouville
Seja $Y = [a, b]$ um intervalo finito em $\mathbb{R}$. As integrais de ordem arbitrárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, onde $Re(\alpha) > 0$, denotadas respectivamente por $(I^\alpha_{a+} f)(x)$ e $(I^\alpha_{b-} f)(x)$, são definidas por

$$(I^\alpha_{a+} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^{1-\alpha}} \qquad x > a \tag{4}$$

e

$$(I^\alpha_{b-} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^{1-\alpha}} \qquad x < b. \tag{5}$$

Derivadas fracionárias
Existem diferentes formulações para as derivadas fracionárias, sendo as mais conhecidas as formulações de Riemann-Liouville, de Caputo e a de Grünwald-Letnikov. Outras definições podem ser encontradas em Samko, Kilbas e Marichev (1993).

Diferente da derivada de ordem inteira que, por sua vez, possui interpretação tanto geométrica quanto física, para a derivada fracionária não há ainda um consenso a respeito de sua interpretação, porém existem tentativas de conceber uma interpretação para ela, tal como a proposta por Lorenzo e Hartley (1998) segundo a formulação de Grünwald-Letnikov.

Nesse trabalho serão abordadas apenas as formulações de Riemann-Liouville e de Caputo para o estudo das funções horárias do movimento.

Derivada Fracionária de Riemann-Liouville
As derivadas fracionárias de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, onde $Re(\alpha) > 0$, de Riemann-Liouville em um intervalo finito, de acordo com Camargo (2014), tem sua definição baseada no fato de a derivada ser, no cálculo de ordem inteira, a operação inversa da integração. Dessa forma, definimos

$$(D^\alpha_{a+} y)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{6}$$

e

$$(D^\alpha_{b-} y)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\,, \tag{7}$$

onde $n = [Re(\alpha)] + 1$. As derivadas acima são denominadas derivadas à esquerda e a direita, respectivamente.

Com isso, temos que as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville são derivadas de ordem inteiras de integrais de ordem arbitrárias.

Derivada Fracionária de Caputo

A formulação de Riemann-Liouville para a derivada fracionária tem como consequência o fato de que a derivada de uma função constante nem sempre é 0. De modo a preservar esse resultado do cálculo de ordem inteira, Caputo propõe a seguinte formulação para a derivada fracionária.

Sejam $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ quando $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $\alpha = n$ quando $\alpha \in \mathbb{N}$, então as derivadas no sentido de Caputo são dadas por

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x)) \tag{8}$$

e

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x). \tag{9}$$

METODOLOGIA

O desenvolvimento deste trabalho teve início com uma pesquisa bibliográfica a respeito das diferentes formulações de integrais e derivadas fracionárias, isto é, foi desenvolvido a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros didáticos, artigos científicos, bem como dissertação de mestrado e tese de doutorado. A pesquisa focou-se principalmente nas formulações de Riemann-Liouville e de Caputo que foram majoritariamente estudadas com base em Camargo e Oliveira (2015), Camargo (2014) e Samko, Kilbas e Marichev (1993). Em seguida abordou-se a aplicação destas formulações em outras áreas como à física, mais precisamente ao estudo das equações horárias do movimento uniformemente variado na mecânica clássica, com base no trabalho de Boni (2017). Além disso, procurou-se ilustrar e preservar os aspectos físicos dos problemas que envolvem as referidas equações horárias de movimento bem como explicitar as características das formulações fracionárias para uma ordem específica.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Mecânica Clássica, conforme Nussenzveig (2002), um movimento é dito uniformemente variado quando sua aceleração é constante, isto é, independe do tempo: $a(t) = a$.

Deste modo, para determinar as equações horárias do movimento faz-se necessário dispor de condições iniciais para a velocidade e posição, $v(t_0) = v_0$ e $s(t_0) = s_0$, respectivamente.

Diante destas condições iniciais, o Cálculo de ordem inteira permite que as funções $v(t)$ e $s(t)$ sejam determinadas a partir da integração da aceleração:

$$v(t) = v_0 + at \tag{10}$$

e

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{11}$$

Analogamente, é possível também determinar $v(t)$ e $a(t)$ diferenciando $s(t)$, uma vez que a velocidade é a derivada de primeira ordem da posição, enquanto a aceleração é a derivada de segunda ordem.

As equações horárias do movimento também podem ser obtidas através cálculo fracionário considerando a formulação de Riemann-Liouville. Para tal formulação, em relação à derivada fracionária da função $s(t)$ e calculando-a no intervalo de $[0, t]$, obtém-se

$$(D_{0+}^{\alpha} s)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \int_0^t \frac{s_0 + v_0 x + \frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}x, \qquad n = [Re(\alpha)] + 1. \tag{12}$$

Como $n = 1$ a Equação (12) pode ser reescrita na forma:

$$(D_{0+}^{\alpha} s)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_0^t \frac{s_0}{(t-x)^{\alpha}} \mathrm{d}x + \int_0^t \frac{v_0 x}{(t-x)^{\alpha}} \mathrm{d}x + \int_0^t \frac{\frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha}} \mathrm{d}x \right]. \tag{13}$$

Para a primeira e segunda integrais da Equação (13) tem-se, por uma substituição de variável $u = t - x$:

$$\int_0^t \frac{s_0}{(t-x)^\alpha}\mathrm{d}x = \left[-\frac{s_0(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^t = \frac{s_0 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{14}$$

e

$$\int_0^t \frac{v_0 x}{(t-x)^\alpha}\mathrm{d}x = v_0\left(-\int_t^0 \frac{t}{u^\alpha}\mathrm{d}u + \int_t^0 u^{1-\alpha}\mathrm{d}u\right) = \frac{v_0 t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}. \tag{15}$$

No entanto, por meio de uma integração por partes, a terceira integral da Equação (13) é dada por

$$\frac{a}{2}\int_0^t \frac{x^2}{(t-x)^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{a t^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}. \tag{16}$$

Retornando à Equação (13), obtém-se que

$$\begin{aligned}(D^\alpha_{0+}s)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{s_0 t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{v_0 t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{a t^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}\right] = \\ &= \frac{s_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{a t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.\end{aligned} \tag{17}$$

Nota-se que quando $\alpha = 0$ a Equação (17) retorna para a função horária do espaço descrita em (11). Além disso, quando α tende a 1 a primeira parcela da Equação (17) tende a zero e recupera-se o caso inteiro, isto é, a função horária da velocidade descrita em (10).

Utilizando agora o operador $\left({}^C D^\alpha_{0+}\right)$, segundo a formulação de Caputo, na função $s(t)$ decorre que:

$$\left({}^C D^\alpha_{0+}s\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\left(s_0 + v_0 x + \frac{ax^2}{2}\right)'}{(t-x)^{\alpha-1+1}}\mathrm{d}x = \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{a t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}. \tag{18}$$

Na Equação (18), considerando $\alpha = 0$ recupera-se a função horária do espaço a menos da constante s_0 e, além disso, quando $\alpha = 1$ tem-se exatamente a função horária da velocidade.

Ainda fazendo uso do operador $\left({}^C D^\alpha_{0+}\right)$ a derivada de ordem α, com $1 \leq \alpha < 2$, da função horária do espaço é dada por

$$\left({}^C D^\alpha_{0+}s\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{\left(s_0 + v_0 x + \frac{ax^2}{2}\right)''}{(t-x)^{\alpha-2+1}}\mathrm{d}x = \frac{a t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}. \tag{19}$$

Analogamente ao caso anterior, é possível notar que quando $\alpha = 1$ a Equação (19) recupera a função horária da velocidade, a menos da constante da constante v_0, e para $\alpha = 2$ tem-se exatamente a função horária da aceleração.

As equações horárias do movimento também podem ser obtidas através da integração, onde a equação horária da velocidade é a integral da aceleração e a equação horária do espaço é a integral da velocidade.

De modo análogo é possível aplicar as definições de derivadas fracionárias e obter as equações horárias do movimento fracionárias, como feito em Boni (2017) através da formulação de Riemann-Liouville, que recupera as equações horárias do espaço, a menos da constante s_0, e da velocidade, a menos da constante v_0.

Representação gráfica das equações horárias do movimento para os casos fracionários

A Figura 1 ilustra o comportamento da função apresentado na Equação (18) para diferentes valores de α, entre 0 e 1 e $t > 0$, representando diferentes ordens para a derivada fracionária. Em (18) as constantes são $v_0 = -5$ e $a = 1$.

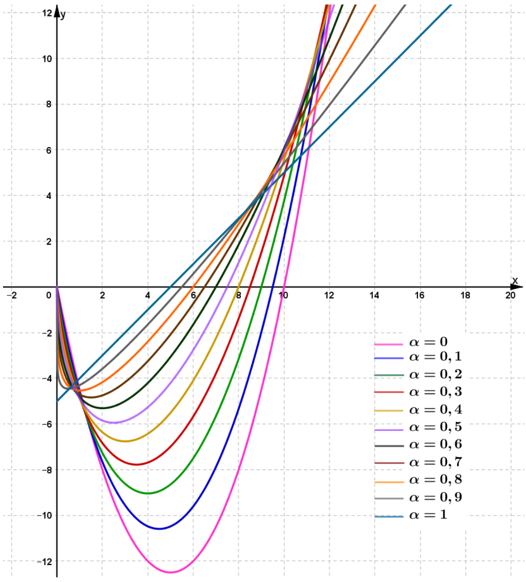

Figura 1: Gráfico da equação (18) para alguns valores de α.

É possível notar, ainda na Figura 1, que essas curvas apresentam a mesma concavidade da parábola obtida quando $\alpha = 0$. Além disso, observa-se que o vértice da parábola se desloca em direção à origem da semi-reta, isto é, as curvas intermediárias têm pontos críticos que se aproximam da origem da semi-reta quando a ordem α se aproxima de 1. Por isso, tal como comentado por Boni (2017), pode-se dizer que tratam-se de curvas semelhantes à parábola, mas com eixo de simetria distorcido e que, conforme α se aproxima de 1, elas se aproximam da reta que descreve a Equação (10).

CONCLUSÕES

O cálculo fracionário tem grande aplicabilidade em diversas áreas, como por exemplo no estudo do Sistema de Lotka-Volterra, na Equação do Telégrafo e na Equação Langevin, que podem ser encontradas em Camargo (2014). Como as equações horárias do movimento são demasiadamente estudadas no cálculo de ordem inteira é de se esperar que o cálculo fracionário possa revelar algumas características dos movimentos descritos por essas equações.

Após a discussão pode-se perceber diferenças entre os resultados obtidos com as formulações de Caputo e Riemann-Liouville. Com a formulação de Riemann-Liouville, foi possível obter as equações horárias para o espaço e para a velocidade, enquanto para a aceleração o mesmo não ocorre. Já com a formulação de Caputo, as equações do espaço, velocidade e aceleração são recuperadas, exceto pelo fato de que é possível em alguns casos as equações serem equivalentes às originais a menos de uma constante.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao IFSP - Câmpus São Paulo que fomentou a bolsa de iniciação científica para o desenvolvimento deste projeto.

REFERÊNCIAS

BONI, M. D. T. M. **Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, Brasil, 2017.

CAMARGO, R. de F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese (Doutorado), São Paulo, 2014.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de. **Cálculo Fracionário**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Unicamp, 2004.

LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus. **NASA/TP-1998-208415**, v. 1, n. 1, p. 6–8, 1998.

NUSSENZVEIG, M. H. **Curso de Física Básica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

RICIERI, A. P. **Derivada Fracionária, Transformada de Laplace e Outros Bichos**. 1. ed. São José dos Campos: Prandiano, 1993.

SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. **Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications**. 1. ed. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.