



V Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica

V EnICT

ISSN: 2526-6772

IFSP – Câmpus Araraquara

22 e 23 de outubro de 2020



ANÁLISE DAS DIFICULDADES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE FUNÇÕES ANTES E APÓS UMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO

GABRIEL OLIVEIRA PINTO¹, OTAVIO PACIULLO FURQUIM², WILLIAM VIEIRA³, ROBERTO SEIDI IMAFUKU⁴

¹ Licenciando em Matemática, IFSP Campus Guarulhos, gabrieloliveirabrotero@gmail.com

² Licenciando em Matemática, Bolsista pelo IFSP, IFSP Campus Guarulhos, otaviopaciullofurquim@gmail.com

³ Doutor em educação Matemática, Docente do IFSP Campus Guarulhos, wvieira@ifsp.edu.br

⁴ Doutor em educação Matemática, Docente do IFSP Campus Guarulhos, roberto.imafuku@ifsp.edu.br

Área de conhecimento: Ensino-aprendizagem – 7.08.04.00-1

RESUMO: Neste artigo, apresentamos os resultados de uma pesquisa realizada com licenciandos em Matemática em uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo para identificar os conhecimentos que os participantes têm sobre funções e suas múltiplas representações, antes e após estes serem submetidos a experiências de formação nas disciplinas no curso de licenciatura do qual participam. Na primeira fase, aplicamos um questionário para os 42 ingressantes e classificamos os principais erros cometidos; dois semestres depois, aplicamos um novo questionário para 19 remanescentes, e voltamos a classificar os principais erros. Os resultados apontam que após terem cursado disciplinas que tratam sobre funções, os participantes apresentaram uma melhora no seu desempenho quando questionados sobre a identificação do domínio e da imagem de uma função em sua representação gráfica.

PALAVRAS-CHAVE: Aspectos algorítmicos, intuitivos e formais; Análise de Erros; Funções; Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta resultados de um projeto de pesquisa que tem por objetivo verificar as dificuldades de estudantes ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática com relação ao conceito e as múltiplas representações de função e avaliar se essas dificuldades são sanadas ao longo da formação matemática no Ensino Superior.

As orientações oficiais reiteram a importância do estudo de funções na formação matemática de estudantes do ensino básico, que é citado pela primeira vez no currículo de Matemática do estado de São Paulo (2011) no 9º ano do Ensino Fundamental e aponta como essencial o entendimento de função como “(...) a relação de interdependência entre grandezas” (SÃO PAULO, 2012, p. 63). No Ensino Médio, novos tipos de funções são trabalhados e ao final do terceiro ano os estudantes devem “(...) saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características” (SÃO PAULO, 2012, p. 63).

Além disso, durante sua formação, os estudantes devem “ter autonomia para interpretar um gráfico e reconhecê-lo em situações diversas pois a compreensão de um conceito matemático em geral está relacionada à capacidade do aluno em migrar de uma forma de representação matemática para a outra” (MENEGETTI; RODRIGUEZ; POFFFAL, 2017, p. 166).

Apesar de ser um tema central no estudo da Matemática, há alguns anos pesquisadores vêm apontando para o fato de que, na realidade, apenas uma pequena parcela dos alunos tem completa compreensão sobre funções e os conceitos envolvidos em suas múltiplas representações ao final de sua formação básica. Por exemplo, como constatado por Vinner e Dreyfus (1989), ainda na década de 80, em média, apenas 40% dos estudantes do Ensino Médio conseguiram identificar os elementos que compunham uma função em sua representação gráfica.

Faour (2020) realizou uma pesquisa com 465 estudantes do segundo grau de escolas públicas de Beirute, no Líbano, acerca das funções e suas múltiplas representações e com isso concluiu que, por exemplo, apenas 29% deles entendia o conceito de domínio e imagem.

A fim de colaborar com essa discussão e buscando avaliar como a formação dos futuros professores de Matemática influencia no processo de aprendizagem de funções, no início de 2019 aplicamos um questionário sobre este tema para ingressantes em um curso de licenciatura em Matemática e, após os participantes terem passado, durante dois semestres letivos, por disciplinas como Fundamentos de Matemática 1, Fundamentos de Matemática 2, Fundamentos de Geometria Analítica e Introdução a Lógica Matemática, nas quais as funções são estudadas, aplicamos um novo questionário, no início de 2020, tratando sobre o mesmo assunto, com intuito de verificar quais das dificuldades identificadas anteriormente foram, ou não, superadas.

As análises dos questionários seguiram a análise de erros proposta por Cury (2007) e os erros de cada questão foram catalogados e tabulados. A análise dos protocolos é baseada na interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocados por Fischbein (1994).

Os questionários aplicados contêm, respectivamente, seis e quatro questões que tratam de conceitos e ideias sobre funções e suas diferentes representações. Neste artigo, relatamos as análises e comparações entre uma questão, presente nos dois questionários, que apresenta um gráfico de função e que os participantes tiveram de encontrar raízes, pontos de máximo e mínimo e conjuntos domínio e imagem.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Fischbein (1994) argumenta sobre a necessidade de observarmos se há ou não a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos num sujeito em atividade matemática. Segundo ele, isto significa olhar a Matemática como um processo criativo, uma atividade humana, que envolve momentos de “(...) iluminação, hesitação, aceitação e refutação” (FISCHBEIN, 1994, p. 231). Partindo dessa premissa, entendemos que a interação desses três aspectos deve guiar nossas escolhas e práticas, se desejamos que nossos estudantes sejam capazes de produzir afirmações e provas matemáticas e de avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções.

O aspecto formal refere-se a axiomas, definições, teoremas e demonstrações e Fischbein reitera que “(...) têm de penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio. Devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo estudante” (FISCHBEIN, 1994, p. 232), uma vez que compõem o núcleo da Matemática e precisam ser considerados no processo de criação nessa ciência. Aponta ainda que o pensamento proposicional e as construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos sujeitos e que só um adequado processo de ensino pode promover essa aquisição. No que se referem as funções, se trata de compreender o conceito de função e saber identificar cada um de seus elementos.

O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução, que têm caráter fundamental nos processos de entendimento e de criação matemática, pois só o conhecimento das estruturas formais não é suficiente para conferir a habilidade de resolver problemas. Segundo Fischbein (1994, p. 232), “(...) Esta profunda simbiose entre significado e habilidades é uma condição básica para o produtivo e eficiente raciocínio matemático”. Nas funções, o aspecto algorítmico aparece enquanto o estudante utiliza técnicas algébricas para encontrar por exemplo, as raízes de uma função.

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva, ou seja, o que um sujeito considera auto evidente e não vê necessidade de prova ou justificativa (FISCHBEIN, 1994), como afirmações do tipo ‘A parte é menor que o todo’ ou ‘Multiplicar um número por outro sempre o torna maior’ ou ainda ‘resolver uma inequação como se fosse uma equação’. Esse conhecimento intuitivo exerce um papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas que, se estiverem de acordo com verdades logicamente justificáveis, podem facilitar o processo; caso contrário, podem configurar dificuldades e conduzir a contradições e equívocos, como os destacados nesse parágrafo.

Sobre a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, Fischbein (1994) defende que a capacidade de processar uma informação não é controlada somente pelas estruturas lógicas, mas também por modelos intuitivos, que agem de maneira implícita, colocando restrições e definindo caminhos. E a

influência desses modelos no pensamento matemático é mais importante e decisiva do que se acredita e permanece agindo, mesmo após as estruturas formais do raciocínio estarem desenvolvidas.

Essas são as ideias teóricas que embasam nossas análises. No que segue, apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa.

METODOLOGIA

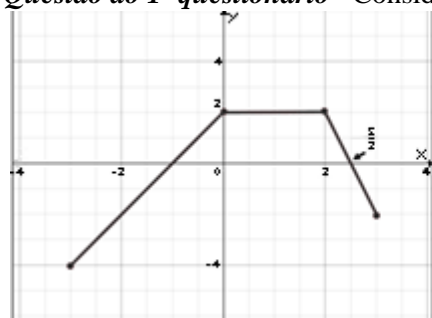
Para atingir nossos objetivos, no início de 2019, um questionário contendo uma questão sobre gráfico de função, com perguntas referentes aos seus elementos, foi aplicado para 42 ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do Estado de São Paulo. Dois semestres depois, no início de 2020, foi aplicado, para 19 participantes remanescentes da aplicação inicial, um novo questionário, com uma nova questão sobre gráfico de função, nos mesmos moldes da questão do 1º questionário.

Em ambas as situações, os questionários foram respondidos individualmente, com duração máxima de uma hora e meia, no campus em que os participantes estudam e no horário de aula das disciplinas. Não foi permitido nenhum tipo de consulta a materiais externos e os pesquisadores não forneceram nenhuma informação adicional, além daquelas constantes nos enunciados das questões propostas. Antes de responderem as questões, todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e, nas análises dos dados coletados, são tratados por apelidos de modo a garantir o anonimato. Após a aplicação de cada um dos questionários foi realizada uma avaliação das respostas dadas pelos participantes, acompanhada de uma Análise de Erros proposta por Cury (2007). Este procedimento metodológico está baseado em uma análise de conteúdo, que visa identificar classes de erros que são recorrentes nas resoluções de problemas. Por fim, foi elaborado um quadro que apresenta as frequências percentuais em que cada tipo de erro identificado ocorreu.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentamos abaixo as questões propostas no 1º e 2º questionários, destacamos seus objetivos e analisamos as respostas dadas pelos participantes.

Questão do 1º questionário - Considere a função representada no gráfico a seguir.



Determine:

- O domínio de f .
- A imagem de f .
- O máximo e o mínimo de f .
- Os intervalos em que f é decrescente.
- Os intervalos em que f é crescente.
- Os intervalos em que f é constante.
- O valor de $f(-1)$ e $f(3)$.
- As raízes (ou zeros) de f .

Fonte: Arquivo pessoal.

Nosso objetivo com essa questão foi avaliar se os participantes inter-relacionariam aspectos intuitivos, algorítmicos e formais na identificação dos conceitos de domínio, imagem, mínimos e máximos, intervalos onde a função é crescente ou decrescente, imagem de um ponto e raízes em uma representação gráfica de função.

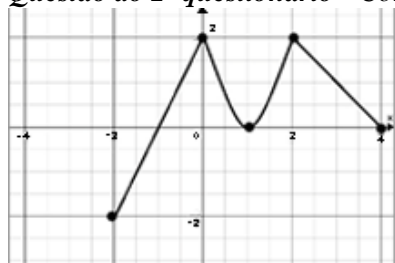
A Figura 1 destaca a resposta de Bia, uma das estudantes que acertou todos os itens propostos.

a) O domínio de f . $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$	e) Os intervalos em que f é crescente. $-3 \leq x \leq 0$
b) A imagem de f . $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 1\}$	f) Os intervalos em que f é constante. $0 \leq x \leq 2$
c) O máximo e o mínimo de f . máximo $(f) = 1$ mínimo $(f) = -2$	g) O valor de $f(-1)$ e $f(3)$. $f(-1) = 0$ $f(3) = 1$
d) Os intervalos em que f é decrescente. $2 \leq x \leq 3$	h) As raízes (ou zeros) de f . -1 e $5/2$

Figura 1. Respostas de Bia para os itens da questão do 1º questionário
Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir destacamos a questão presente no 2º questionário.

Questão do 2º questionário - Considere a função f representada no gráfico a seguir.



Determine:

- O domínio de f .
- A imagem de f .
- O máximo e o mínimo de f .
- Os intervalos em que f é decrescente.
- Os intervalos em que f é crescente.
- O valor de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

Fonte: Arquivo pessoal.

O estudante Leonardo (Figura 2. Resposta de Leonardo para os itens da questão do 2º questionário.) apresentou respostas que são consideradas corretas. Outros 8 participantes também acertaram a questão.

a) O domínio de f . $D(f) = [-2, 4]$	d) Os intervalos em que f é decrescente. f é decrescente no intervalo de $x = [0, 1] \cup [2, 4]$
b) A imagem de f . $Im(f) = [-2, 2]$	e) Os intervalos em que f é crescente. f é crescente no intervalo de $x = [-2, 0] \cup [1, 2]$
c) O máximo e o mínimo de f . Máximos $(0, 2)$ e $(2, 2)$ mínimos $(-2, -2)$	f) O valor de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ e $f(4)$. $f(-1) = 0$ $f(1) = 0$ $f(0) = 2$ $f(4) = 0$

Figura 2. Resposta de Leonardo para os itens da questão do 2º questionário.
Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 1, apresentamos uma classificação dos erros das respostas consideradas incorretas em ambos os questionários e, em seguida, exemplificamos e discutimos cada um dos erros identificados. Ressaltamos que uma mesma resposta pode ser enquadrada em mais de uma classe de erro e, por isso, a soma dos percentuais das classes não totaliza 100%.

Quadro 1. Classificação dos erros encontrados

Fonte: Elaborado pelos autores

	Categorias de erros	% de ocorrência	
		1º Questionário	2º Questionário
F1	Representar incorretamente um intervalo numérico	55%	16%
F2	Representar um intervalo errado	52%	26%
F3	Não identificar corretamente as imagens de elementos	38%	21%
F4	Em branco	24%	32%

A categoria de erros F1, *Representar incorretamente um intervalo numérico*, abrange as respostas nas quais os estudantes não apresentaram a notação correta de intervalo numérico. A Figura 3. **Respostas de Leonardo para os itens e do 1º e 2º questionários** apresenta as respostas de Leonardo no 1º e 2º questionários, respectivamente. Podemos verificar que no 1º questionário Leonardo não soube identificar e representar corretamente o intervalo de crescimento da função; contudo, a resposta correta para o 2º questionário indica que este participante foi capaz de inter-relacionar aspectos algorítmicos-intuitivos relacionados à interpretação gráfica com aspectos formais associados ao crescimento de funções. Além disso, apesar de usar indevidamente o símbolo de união, apresenta uma notação de intervalo correta, perspectiva que reitera uma melhor compreensão de aspectos formais. Vale citar também que este item apresentou uma melhora significativa nas suas ocorrências, caindo de 55% para 16%.

e) Os intervalos em que f é crescente.

f é crescente em $(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1)$

e) Os intervalos em que f é crescente.

f é crescente no intervalo $x = [-2, 0] \cup [1, 2]$

Figura 3. Respostas de Leonardo para os itens e do 1º e 2º questionários
Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria de erros F2, *Representar um intervalo errado*, agrupa respostas que não apresentaram o intervalo esperado. A Figura 4. **Respostas de Laura para os itens a e b dos 1º e 2º questionários** mostra a resposta de Laura no 1º e 2º questionários, respectivamente. Apesar de usar uma notação adequada, utilizando os colchetes, Laura não apresentou intervalos corretos para o domínio e imagem 1º questionário. No 2º questionário, no entanto, a estudante conseguiu articular aspectos formais, algorítmicos e intuitivos para, além de apresentar a notação correta, também identificar corretamente o domínio e a imagem da função proposta. Este tipo de erro apresentou uma redução de 52% para 26% de ocorrência de um ano para o outro, mostrando que os participantes melhoraram suas habilidades relacionadas ao tema durante esse período.

a) O domínio de f . b) A imagem de f .

$D:]-4, 4[$ $I:]-2, 2[$

a) O domínio de f . b) A imagem de f .

$[-2, 4]$ $[-2, 2]$

Figura 4. Respostas de Laura para os itens a e b dos 1º e 2º questionários
Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria de erros F3, *Não identificar corretamente as imagens dos elementos*, agrupa respostas em que os estudantes não tiveram êxito ao encontrar as imagens correspondentes aos elementos pedidos no enunciado. A Figura 5. **Resposta de João no 1º questionário e de Giovana no 2º questionário** mostra as respostas de João para o item g do 1º questionário e Giovana para o item f do 2º questionário, respectivamente. Nessa categoria nenhum estudante apresentou melhora em seu desempenho no 2º questionário. Apesar disso, a diminuição no percentual de erros dessa categoria, de 38% para 21%, indica, de maneira geral, uma evolução dos participantes na interação entre aspectos intuitivos e formais relacionados à identificação da imagem de elementos de uma função.

g) O valor de $f(-1)$ e $f(3)$.

$f(-1) = -2$ $f(3) = \text{não existe}$

f) O valor de $f(-1), f(0), f(1)$ e $f(4)$.

$f(-1) = 1,5$ $f(1) = 0,5$
 $f(0) = ?$ $f(4) = ?$

Figura 5. Resposta de João no 1º questionário e de Giovana no 2º questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, cumpre destacar a categoria F4, *Em branco*; enquanto no 1º questionário 24% dos estudantes não se habilitou a dar uma resposta, após dois semestres de estudos em Matemática, 32% dos participantes decidiu não dar nenhuma resposta. Nessa categoria entraram apenas as respostas dos estudantes que deixaram a questão completamente em branco, não respondendo nenhum dos itens, isso pode ser causado, possivelmente, por um receio dos alunos em dar a resposta errada. Embora no 2º questionário o número de questões em branco tenha aumentado, as diminuições dos percentuais das demais categorias indicam um impacto positivo do processo de formação no entendimento dos participantes sobre conceitos relacionados às funções.

CONCLUSÕES

Com essa pesquisa fomos capazes de verificar se os estudantes possuem os conhecimentos acerca de funções e suas múltiplas representações apresentados por MENEGHETTI, RODRIGUEZ e POFFFAL (2017) como essenciais. Assim como destacado por Vinner e Dreyfus (1989) e Faour (2020), os participantes da nossa pesquisa, apesar de serem futuros professores de Matemática que já passaram por um ano de formação superior, também apresentaram dificuldades ao tentar identificar elementos de uma função. O tema é central no estudo da Matemática e está reiterado nas orientações oficiais (SÃO PAULO, 2011) e por isso, essas dificuldades podem significar que quando estudaram esse tema, os participantes não tiveram a devida compreensão sobre ele.

Finalmente, após a análise do 2º questionário, ainda que os estudantes continuem apresentando dificuldades, pode-se notar que houve uma melhora nos percentuais de aparição dos erros encontrados no 1º questionário, conforme destacado no Quadro 1, isso pode indicar que ao terem revisitado o tema de funções durante a sua formação Matemática superior, os estudantes apresentaram uma maior capacidade de inter-relacionar aspectos formais, algorítmicos e intuitivos durante a elaboração de suas respostas.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de São Paulo – IFSP – campus Guarulhos pela bolsa de iniciação científica concedida.

REFERÊNCIAS

- CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- FAOUR, Huda. Existence of the Essential Features of the Function Concept in Public Secondary Students' Definitions.
- FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In BIEHLER, R. et al. (Org.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. p. 328.
- MENEGHETTI, Cinthya Maria Schneider; DO AMARAL RODRIGUEZ, Bárbara Denicol; POFFFAL, Cristiana Andrade. Gráfico de função polinomial: uma discussão sobre dificuldades de aprendizagem no Ensino Superior. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 1, p. 156-168, 2017.
- SÃO PAULO. Secretaria Estadual de Educação. **Currículo do Estado de São Paulo, Matemática**. SEE, 2012.
- VINNER, Shlomo; DREYFUS, Tommy. Images and definitions for the concept of function. **Journal for research in mathematics education**, p. 356-366, 1989.