



V Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica  
V EnICT  
ISSN: 2526-6772  
IFSP – Câmpus Araraquara  
22 e 23 de outubro de 2020



## ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS E VALIDAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICA DO FENÔMENO DA TORÇÃO PURA EM BARRAS MACIÇAS CIRCULARES E ELÍPTICAS UTILIZANDO O SOFTWARE AUTODESK INVENTOR PROFESSIONAL 2020®

JULIO CESAR NAVARI<sup>1</sup>, GUILHERME CHADES AUGUSTINHO<sup>2</sup>, PAULO ROSSI PRATES<sup>3</sup>, SÍLVIO APARECIDO VERDÉRIO JÚNIOR<sup>4</sup>, CELIO CAMINAGA<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Campus Araraquara - juliocesarnavari@gmail.com

<sup>2</sup> Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Campus Araraquara, guilhermechades@hotmail.com

<sup>3</sup> Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Campus Araraquara, paulo\_rossiprates@hotmail.com

<sup>4</sup> Docente, Instituto Federal de São Paulo Câmpus Araraquara - silvioverderio@ifsp.edu.br

<sup>5</sup> Docente, Instituto Federal de São Paulo Câmpus Araraquara - caminaga@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.05.03.01-9

**RESUMO:** A torção tem grande relevância no estudo e projeto de eixos mecânicos de transmissão de potência em máquinas, molas, parafusos, aplicações em biomecânica etc. A evolução do Método de Elementos Finitos (MEF) contribuiu significativamente no projeto e otimização desses componentes, principalmente em parafusos e sistemas em aplicações biomecânicas. O propósito deste projeto consiste, por meio da Análise de Elementos Finitos (FEA) do Software Autodesk Inventor Professional 2020®, no estudo e validação analítico-numérica do fenômeno de torção pura em geometrias maciças de aço SAE 1045 temperado e revenido e seção circular e elípticas. A influência do refinamento da malha nos resultados obtidos, a partir da avaliação de erros em relação a referências de literatura analíticas e a resposta mecânica de cada seção transversal aos esforços de torção pura também foram estudados. Os resultados obtidos validaram a formulação do software utilizado e os métodos de cálculo apresentados, bem como confirmaram a melhor resposta mecânica a torção pura da seção circular.

**PALAVRAS-CHAVE:** Método dos Elementos Finitos; Torção Pura; Seção Elíptica; Simulação Numérica; Validação Analítica e Numérica; Aço SAE 1045.

## INTRODUÇÃO

Torque, de acordo com Hibbeler (2018), é a aplicação de um momento em um corpo gerando uma torção em torno do seu eixo axial. O estudo das propriedades de tensão e deformação causadas por esse fenômeno, é de extrema relevância, tendo em vista a sua grande ocorrência em várias aplicações na engenharia.

De acordo com Morales (2013), a necessidade de competitividade e redução de custos de produção alavancou as pesquisas na área de simulação numérica e sua utilização pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Ressalta, ainda, que com a evolução da capacidade computacional se faz possível a análise do comportamento de estruturas até de geometrias complexas, uma alternativa mais rápida e barata frente aos ensaios experimentais.

Norton (2013) destaca que a utilização de modelagens computacionais tridimensionais em projetos mecânicos contribui em facilitar e otimizar o processo de cálculo e análise de propriedades geométricas e de sólidos – como o centro de gravidade, centro de massa e momentos de inércia – além de facilitar análises paramétricas e de otimização no projeto. No entanto destaca e alerta, que os resultados podem enganar caso o problema não seja bem formulado; sendo necessário um maior conhecimento da física do problema para ser capaz de reconhecer os resultados que eventualmente possam estar inconsistentes com a situação real do problema.

Das referências de Avelino Alves Filho (2000) e Felippa (2001), a deformação da estrutura ou componente em um modelo discretizado está associada ao deslocamento dos nós, não importando sua

geometria ou tipo de esforço solicitado. Tendo esse deslocamento nodal como parâmetro, torna-se possível a determinação dos esforços internos e das tensões, viabilizando a análise da resistência do objeto.

Na Indústria e Engenharia há uma ampla utilização de peças e componentes que são submetidos à esforços de torção, ressaltando a predominante aplicação daqueles com seção transversal circular, maciça ou recortada, como eixos de transmissão, molas helicoidais e até mesmo ferramentas como brocas, assim torna-se de fundamental importância melhor conhecer e estudar a resposta dos materiais a esse tipo de solicitação. Dessa forma, o presente estudo trata da validação analítico-numérica de resultados simulados e avaliação comparativa da resistência e deformação em torção pura de seções circular e elípticas de baixa excentricidade. As geometrias foram modeladas e simuladas através do módulo FEA do software Autodesk Inventor Professional 2020®.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para a comparação analítico-numérica dos esforços de torção pura com a numérica computacional, faz-se necessário a observância e o segmento de algumas hipóteses e restrições, tais quais enunciadas por Shigley (1984), Hibbeler (2010), Norton (2013) e Beer et al. (2015):

- Torção Pura ( $N = 0; V = 0; M = 0$  e  $T \neq 0$ ) – onde  $N$  é o esforço normal,  $V$  é o esforço cortante,  $M$  é o momento fletor e  $T$  é o momento torçor;
- Hipótese de torção de Saint-Venant – as seções transversais permanecem planas e perpendiculares em relação ao eixo de rotação e as linhas radiais continuam retas após a deformação axissimétrica, não ocorrendo empenamento da seção transversal, para seção circular;
- As linhas longitudinais se distorcem e interceptam os círculos internos com ângulos iguais para o mesmo círculo, o que garante que a deformação de cisalhamento ou angular ( $\gamma$ ) varia linearmente com o raio da seção transversal ( $r$ );
- Material homogêneo, isotrópico e elástico-linear que obedece a Lei de Hooke para Tensão de Cisalhamento;
- Regime de pequenas deformações, com o ângulo de rotação ( $\phi$ ) suficientemente baixo para garantir que o comprimento longitudinal ( $L$ ) e o raio da seção transversal ( $r$ ) não sofram alterações;
- Seções elípticas de pequena excentricidade.

Conforme enunciado por Xiao (1999), a torção de eixos de Saint-Venant para seções circulares é uma questão resolvida, porém há uma dificuldade em se obter soluções analíticas para eixos com seções transversais mais complexas, o que mostra a necessidade de métodos numéricos como elementos finitos, para obtenção de sua solução.

As equações de tensão de cisalhamento máxima, representada por  $\tau_{m\acute{a}x}$ , e ângulo de torção, representado por  $\phi$  são fornecidas pela Tabela 1, de acordo com Hibbeler (2018), para o estudo da torção pura em seções transversais circular e elípticas.

**TABELA 1. Equações para cálculo das Tensões de Cisalhamento Máxima e Ângulos de Torção.**  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Seção Transversal	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\phi$
Circular	$\frac{2 \cdot T}{\pi r^3}$ (1)	$\frac{2 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi r^4}$ (3)
Elíptica	$\frac{2 \cdot T}{\pi a b^2}$ (2)	$\frac{(a^2 + b^2) T \cdot L}{\pi a^3 b^3 \cdot G}$ (4)

Onde,

$a$  – metade do eixo maior da elipse, em mm.

$b$  – metade do eixo menor da elipse, em mm.

$G$  – módulo de cisalhamento transversal, em MPa.

$L$  – comprimento longitudinal do corpo em estudo, em mm.

$r$  – raio seção transversal, em mm.

$T$  – torque, em N.mm.

$\phi$  – ângulo de torção, em rad.

$\tau_{m\acute{a}x}$  – tensão de cisalhamento máxima, em MPa.

## METODOLOGIA

Para uma comparação realista da resposta mecânica das seções estudadas ao fenômeno da torção pura, as seções foram modeladas de forma a possuírem a mesma área transversal resistente. Adotando como referência a seção circular de  $r = 4 \text{ mm}$  e área de  $50,2655 \text{ mm}^2$ , calculou-se os parâmetros geométricos  $a$  e  $b$  das três elipses distintas; todas restritas a pequenas excentricidades. Todas os corpos foram simulados com o mesmo comprimento longitudinal  $L = 180 \text{ mm}$ .

O processo de análise por Elementos Finitos no software Autodesk Inventor Professional 2020® consiste na criação de um estudo estático; seleção, definição e ajuste das propriedades do material; adição de restrições e de esforços externos; seleção e ajuste nos critérios de convergência de malha e simulação e análise de resultados. O software, unicamente e por padrão, utiliza elementos tetraédricos parabólicos na criação da malha. Neste estudo, observando-se a maior região elástica e regime de pequenas deformações, utilizou-se o Aço SAE 1045 Temperado e Revenido, que de acordo com a biblioteca de materiais MatWeb (2017), caracteriza-se por  $G = 80.000 \text{ MPa}$  e tensão de escoamento de engenharia de  $\sigma_E = 1259 \text{ MPa}$ .

Após a criação das geometrias foi necessário determinar a carga de momento torçor máxima a que os eixos poderiam ser submetidos durante a análise, observando-se a permanência em regime elástico. Para isso, das propriedades mecânicas do Aço SAE 1045 Temperado e Revenido, das Equações (1) a (4) da Tabela 1 e da relação de Garcia (2012) para aços de médio carbono, a tensão de cisalhamento em escoamento é igual a  $\tau_e = 0,6 \cdot \sigma_e$ ; obteve-se a Tabela 2.

**TABELA 2. Dimensões das seções e cálculo do torque de escoamento.**

Fonte: Elaborada pelos autores.

Geometria Seção	Dimensões (mm)	$T_e \text{ (N.mm)}$
Circular	$r = 4$	$7,59 \cdot 10^4$
Elíptica 1	$a = 6 \text{ e } b = 16/6$	$5,06 \cdot 10^4$
Elíptica 2	$a = 16/3 \text{ e } b = 3$	$5,70 \cdot 10^4$
Elíptica 3	$a = 5 \text{ e } b = 3,2$	$6,08 \cdot 10^4$

Como o objetivo deste trabalho é comparar a resposta mecânica das geometrias estudadas, optou-se pela padronização dos valores de torque aplicado nas seções; de forma que  $T_e \leq 5,06 \cdot 10^4 \text{ N.mm}$ . Para a etapa de validação analítico-numérica de resultados, objetivando preservar as características de pequenas deformações em regime elástico, adotou-se o valor de  $T_e = 4 \cdot 10^4 \text{ N.mm}$ .

Prosseguindo na construção do estudo, tem-se a adição de uma restrição fixa em uma face do corpo; com a adição da carga de momento torçor na face oposta. Assim, após a definição e ajuste das propriedades do material em estudo, aplicações de restrição física e carga de momento torçor, tem-se a análise de malha. O software utilizado cria uma malha padrão a partir das configurações de convergência com número máximo de tentativas/iterações de refinamento ( $h$ ) igual a 2 e critério de interrupção de simulação com 10% de diferença entre resultados simulados ou até o valor de  $h$ . Além da malha padrão gerada pelo software, através de alterações nas configurações de convergência, utilizou-se uma malha com maior refinamento, de forma a estudar a influência da malha nos resultados das simulações e avaliar os eventuais ganhos de precisão alcançados. A nova configuração de convergência utilizada consistiu na alteração do número máximo de tentativas de refinamentos para 10 e critério de interrupção de simulação igual a 2%. Em ambas as malhas utilizadas, manteve-se o limiar de refinamento de  $h$  em 0,75 (ou seja, refinamento localizado de 25% dos elementos com maiores erros) e convergência baseadas na Tensão Equivalente de von Mises, que de acordo com Santos et al. (2014), é a tensão equivalente que representa o estado de tensão resultante em todas os componentes e dimensões espaciais tridimensionais.

As seções transversais simuladas no software Autodesk Inventor Professional 2020®, com os refinamentos aplicados, são mostradas na Figura 1.



FIGURA 1. Barras a) circular, b) elíptica 1, c) elíptica 2 e d) elíptica 3, na análise por MEF, em vista de malha refinada, com engaste em uma das faces e torque aplicado na face oposta.  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Na etapa de solução, tem-se a simulação do ensaio de torção estático em regime elástico e em condições simétricas, conforme definido na norma ABNT NBR 6003 (1984).

A etapa final do estudo consiste na análise dos resultados; subdivididos em validação analítico-numérica dos resultados e análise e seleção de malha e estudo comparativo da resposta mecânica à torção pura das seções transversais estudadas.

A validação analítico-numérica dos resultados das simulações e análise de influência e independência de malhas ocorrem a partir dos resultados analíticos calculados com base nas Equações (1) a (4), bem como da avaliação e discussão dos erros apresentados em relação a  $\tau_{m\acute{a}x}$  e  $\phi$  – respectivamente,  $Erro_{\tau_{m\acute{a}x}}$  (%) e  $Erro_{\phi}$  (%) e conforme Equações (5) e (6). Onde  $\bar{\tau}_{m\acute{a}x}$  é a média dos valores da tensão de cisalhamento máxima obtida na simulação numérica, em MPa e  $\bar{\phi}$  é a média do valor do ângulo de torção aproximado pelo deslocamento obtido nas simulações numéricas, em rad.

$$Erro_{\tau_{m\acute{a}x}} (\%) = \frac{|\tau_{m\acute{a}x} - \bar{\tau}_{m\acute{a}x}|}{\tau_{m\acute{a}x}} \cdot 100\% \quad (5)$$

$$Erro_{\phi} (\%) = \frac{|\phi - \bar{\phi}|}{\phi} \cdot 100\% \quad (6)$$

O relatório de resultados da análise de tensões do próprio software fornece os resultados da tensão de cisalhamento máxima e do deslocamento total ou por eixo, mas não apresenta diretamente resultados quanto ao ângulo de torção. Dessa forma faz-se necessário a utilização de uma aproximação geométrica para avaliação do ângulo de torção em função do deslocamento para as diferentes seções analisadas, conforme mostrado na Figura 2 e pelas Equações (7) e (8); que é válida para o regime de pequenas deformações e em elipses com baixa excentricidade. Onde  $s$  é o deslocamento da seção deformada do relatório de resultados do software.

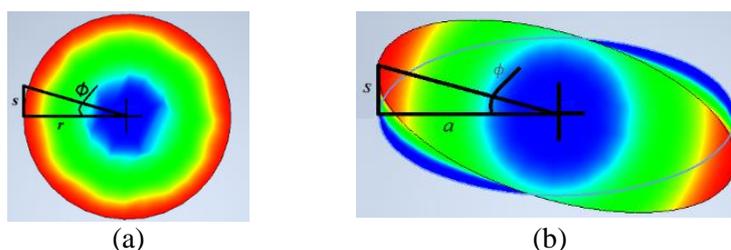


FIGURA 2. Forma de modelagem e cálculo aproximado do ângulo de torção a partir do deslocamento da seção deformada a) circular e b) elíptica deformada.  
Fonte: Elaborada pelos autores.

$$\tan \phi = \frac{s}{r} \quad (7)$$

$$\tan \phi = \frac{s}{a} \quad (8)$$

Por fim, foi realizado um estudo comparando a resposta mecânica em torção pura de cada umas das diferentes seções transversais. Foram adotados cinco valores distintos de torque, respeitando-se o limite  $T_e \leq 5,06 \cdot 10^4$  N.mm da Tabela 2; iguais a 8000, 16000, 24000, 32000 e 40000 N.mm. Conforme resultados das

análises de erro e validação analítico-numérica definiu-se, de forma padrão em termos de refinamento, a malha utilizada para as seções. Dos resultados obtidos, plotou-se um gráfico momento de torção em N.mm versus ângulo de torção em rad ( $T \times \phi$ ) para melhor visualização, análise e discussão.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na análise de erros e de influência do refinamento das malhas e validação analítico-numérica dos resultados obtidos e conforme metodologia de modelagem e cálculos descritos, tem-se a Tabela 3.

**TABELA 3. Resultados numéricos e analíticos por seção transversal para análise e validação de resultados.**

Fonte: Elaborada pelos autores.

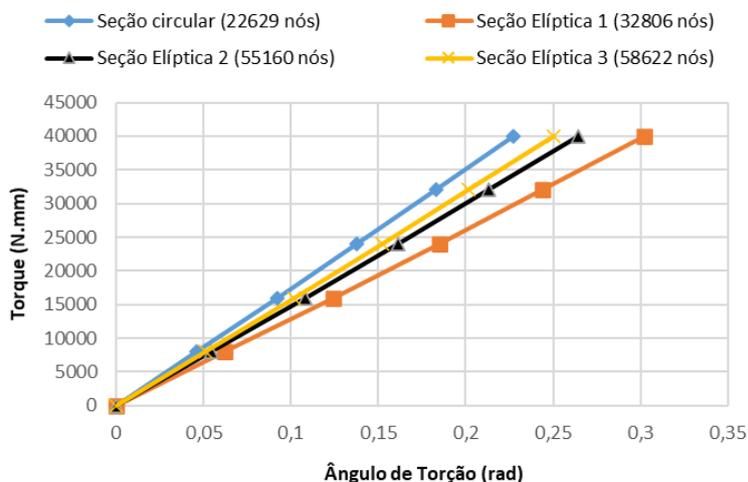
Seção Transversal	Nº de Nós da Malha	Resultados Analíticos		Resultados Numéricos		Erro $_{\tau_{m\acute{a}x}}$ (%)	Erro $_{\phi}$ (%)
		$\tau_{m\acute{a}x}$ (MPa)	$\phi$ (rad)	$\bar{\tau}_{m\acute{a}x}$ (MPa)	$\phi$ (rad)		
Circular	3598	397,887	0,2238	401,55	0,2273	0,921	1,564
	22629			400,25	0,2272	0,594	1,519
Elíptica 1	3304	596,83	0,3015	721,00	0,3033	20,805	0,597
	32806			679,75	0,302	13,893	0,166
Elíptica 2	3747	530,516	0,2619	625,50	0,2662	17,904	1,642
	55160			592,35	0,2646	11,655	1,031
Elíptica 3	3658	497,359	0,2465	566,45	0,2506	13,892	1,663
	58622			546,95	0,2504	9,971	1,582

Da análise da Tabela 3 observa-se excelente concordância de resultados analíticos e numéricos, da ordem máxima e mínima, respectivamente, de 20,805% e 0,594% para a  $\tau_{m\acute{a}x}$  e 1,663% e 0,166% para o  $\phi$ . Tais resultados validam – nas condições estabelecidas de regime linear com pequenas deformações – o processo de simulação de Torção Pura para seções circulares e elípticas de baixa excentricidade pelo módulo FEA do software Autodesk Inventor e a metodologia aproximada de estimativa do  $\phi$  a partir do deslocamento.

Os refinamentos de malhas, apesar de aumentarem o custo computacional das simulações, contribuíram significativamente para aumentar a precisão dos resultados em relação a  $\tau_{m\acute{a}x}$  e melhoraram, de forma bastante irrisória, o  $\phi$ . É importante destacar, pela complexidade do fenômeno estudado e dificuldades de atender integralmente as hipóteses e restrições impostas, que é esperado que os resultados analíticos não sejam tão realistas, podendo apresentar menor precisão que os resultados numéricos do módulo FEA. Maiores estudos (especialmente experimentais) mostram-se necessários para melhor conclusão sobre a questão.

Dessa forma, observando-se os ganhos significativos de precisão em relação a  $\tau_{m\acute{a}x}$  e o efeito quase desprezível sobre a  $\phi$ , decidiu-se pela utilização de malhas mais refinadas na etapa final de estudos comparativos de resposta mecânica das seções transversais avaliadas.

A Figura 3 apresenta as curvas de  $T \times \phi$ , relacionando cada seção transversal estudada.



**FIGURA 3. Gráfico do Torque x Ângulo de Torção, para cada seção em estudo.**

Fonte: Elaborada pelos autores.

Da análise das retas na Figura 3 é possível confirmar que as simulações ocorreram regime elástico de pequenas deformações, concordando as hipóteses adotadas e valores assumidos de  $T_e$  e  $\tau_e$ .

Estabelecendo-se uma análise a partir do mesmo torque aplicado, tem-se, em ordem crescente de formação, as seções circular, elíptica 3, elíptica 2 e elíptica 1. Em outra análise, fixando a deformação, observa-se maior esforço torçor necessário na seção circular, elíptica 3, elíptica 2 e elíptica 1. Tais resultados são justificados pelas propriedades de inércia (momento polar de inércia e módulo de resistência à torção) das seções estudadas.

Dessa forma, tem-se que barra maciça de seção transversal circular apresenta melhor resposta mecânica a torção pura em face a sua maior resistência e menor deformação, seguida, nessa ordem, das seções elíptica 3, elíptica 2 e elíptica 1. Destacando-se a pior resposta mecânica da seção elíptica 1, o que é justificado pela sua maior excentricidade, maior e mais complexo estado de deformação e menores valores de propriedades de inércia, e está de acordo com o exposto na literatura especializada (BEER et al., 2015 e HIBBELER, 2018).

## CONCLUSÕES

A validação analítico-numérica da formulação e análise por Elementos Finitos do software Autodesk Inventor Professional 2020<sup>®</sup> para o estudo da torção pura em seções circulares e elípticas de baixa excentricidade no regime elástico em pequenas deformações foi demonstrada e comprovada com boa precisão a partir dos resultados analíticos. A excelente concordância de resultados das aproximações matemáticas utilizadas para avaliação de ângulo de torção ( $\phi$ ) também foi demonstrada.

A utilização de malhas mais refinadas mostrou-se, em faces aos ganhos de precisão na descrição da tensão de cisalhamento máxima ( $\tau_{máx}$ ) e com efeitos irrisórios no ângulo de torção ( $\phi$ ), como a melhor opção; apesar do aumento de esforço computacional demandado nas simulações.

Por fim, os estudos de resposta mecânica a torção pura, mostraram maior resistência e menor capacidade de deformação, nessa ordem, das seções circular, elíptica 3, elíptica 2 e elíptica 1.

## REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, A., **Elementos Finitos a Base da Tecnologia CAE**, 6<sup>a</sup>ed. Érica, 2000.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6003**, Arames de aço – Ensaio de torção simples, 4p., 1984.
- BEER, F. P. et al., **Mecânica dos Materiais**, 7<sup>a</sup>ed., Porto Alegre: McGraw-Hill Education, 2015.
- FELIPPA, C. A., A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts. **Computers & Structures**, v. 79, n. 14, p. 1313-1324, 2001. Disponível em: [http://kis.tu.kielce.pl/mo/COLORADO\\_FEM/colorado/IFEM.AppH.pdf](http://kis.tu.kielce.pl/mo/COLORADO_FEM/colorado/IFEM.AppH.pdf), Data de Acesso: 13/10/2020.
- GARCIA, A.; **Ensaio dos Materiais**. LTC: Rio de Janeiro, 2<sup>a</sup> Edição, 2012.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 10 ed. Pearson Education do Brasil, São Paulo - SP, 2018.
- MATWEB, MATERIAL PROPERTY DATA. **AIISI 1045 Steel, Quenched and Tempered**. Disponível em: <http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=d539dcee38c44ef982a90735e80d348>, Data de Acesso: 02/09/2020.
- MORALES, E. D., **Análise de critérios de falha em materiais dúcteis: um estudo numérico e experimental**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – USP. São Paulo, p. 112. 2013.
- NORTON, R. L., **Projeto de Máquinas: uma abordagem na integrada**, 4<sup>a</sup>ed., Porto Alegre: Bookman, 2013.
- SANTOS, L. de A. et al. Mechanical behavior of three nickel-titanium rotary files: A comparison of numerical simulation with bending and torsion tests. **Materials Science and Engineering: C**, v. 37, p. 258-263, 1 Abril 2014.
- SHIGLEY, J. E., **Elementos de Máquinas**, vol. 1, 3<sup>a</sup>ed., Rio de Janeiro: LTC, 1984.
- XIAO, Q. Z. et al., **Improved hybrid-stress element approach to torsion of shafts**. *Computers and Structures*, v. 71, p. 535-563, 1999.