



V Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica  
V EnICT  
ISSN: 2526-6772  
IFSP – Câmpus Araraquara  
22 e 23 de outubro de 2020



## ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS E VALIDAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICA DO FENÔMENO DA FLEXÃO ENGASTADA EM BARRAS MACIÇAS UTILIZANDO O SOFTWARE AUTODESK INVENTOR PROFESSIONAL 2021®

PAULO ROSSI PRATES<sup>1</sup>, JULIO CESAR NAVARI<sup>2</sup>, GUILHERME CHADES AUGUSTINHO<sup>3</sup> SÍLVIO APARECIDO VERDÉRIO JÚNIOR<sup>4</sup>, CÉLIO CAMINAGA<sup>5</sup>.

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Câmpus Araraquara, [paulo\\_rossiprates@hotmail.com](mailto:paulo_rossiprates@hotmail.com)

<sup>2</sup>Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Câmpus Araraquara, [juliocesarnavari@gmail.com](mailto:juliocesarnavari@gmail.com)

<sup>3</sup>Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Câmpus Araraquara, [guilhermechades@hotmail.com](mailto:guilhermechades@hotmail.com)

<sup>4</sup>Docente, IFSP Câmpus Araraquara, [silvioverderio@ifsp.edu.br](mailto:silvioverderio@ifsp.edu.br)

<sup>5</sup>Docente, IFSP Câmpus Araraquara, [caminaga@ifsp.edu.br](mailto:caminaga@ifsp.edu.br)

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.05.03.01-9

**RESUMO:** Em aplicações de Engenharia, Bioengenharia e Indústria, diversos componentes estão sujeitos a esforços flexores e solicitados por tensões normais de flexão. Essas tensões são calculadas pela “fórmula da flexão”, que associa os esforços de flexão com os parâmetros geométricos do elemento solicitado. O controle da flecha em eixos tem papel fundamental na redução de vibrações e do desgaste em rolamentos, na previsão de trincas, etc. Neste trabalho foram realizadas análises e testes para validação analítico-numérica do fenômeno da flexão pura engastada em seções transversais circular, quadrada e triangular equilátera por meio de análise por elementos finitos utilizando o software Autodesk Inventor Professional 2021®. Estudou-se também influência do refinamento da malha nos resultados numéricos obtidos e o comportamento mecânico comparativo das seções transversais em estudo. Dos resultados, estabeleceu-se a validação da formulação apresentada pelo software, bem como concluiu-se e confirmou-se que a seção transversal triangular equilátera apresenta menor flecha e maior resistência a flexão engastada, seguida das seções quadrada e circular.

**PALAVRAS-CHAVE:** Flexão Engastada; Método dos Elementos Finitos; Simulação Numérica; Validação Física e Numérica.

### INTRODUÇÃO

A norma ASTM E855:2013 descreve os métodos de ensaio que determinam o limite de resistência à flexão para tiras, chapas ou vigas. Dentre eles podemos citar o ensaio de vigas engastadas, que consiste em uma barra engastada no qual será aplicada uma força a uma certa distância do ponto de engaste, gerando um momento fletor (Garcia, 2000).

Vigas são consideradas as mais importantes dentro dos elementos de estruturas, pois seu comportamento está presente desde o suporte para piso de um edifício até na estrutura de um osso humano; conforme Hibbeler (2010). Neste cenário, o ensaio de flexão engastado esteve presente no trabalho de Lopes, et al. (2010) onde foi desenvolvido um protótipo de mini-implante para ancoragem do aparelho Herbst por meio das análises deste ensaio de flexão; comprovando a eficiência da resistência que o mini-implante apresentou em relação a força da mordida humana encontrada na literatura. A importância deste ensaio foi destacada também na validação do desenvolvimento de uma placa óssea bloqueada em formato de T, que contribuiu para a avaliação da resistência da montagem de acordo com a tese de Mesquita (2015).

O presente estudo trata da validação analítico-numérica de resultados simulados e avaliação comparativa da resistência e deformação em flexão pura engastada de seções circular, quadrada e triangular equilátera. As geometrias foram modeladas e simuladas através do MEF do software Autodesk Inventor Professional 2021®.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite o estudo dos deslocamentos e tensões em peças mecânicas e em estruturas. As análises feitas pelo MEF se baseiam em equações diferenciais relacionando variáveis de campo dentro de um determinado domínio, tendo que satisfazer condições de restrições para as variáveis fundamentais e suas derivadas na fronteira do domínio. Os domínios físicos adotados são definidos a partir da forma geométrica dos objetos e das hipóteses básicas sob o problema (GATTASS, 1994). Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, que são chamados de nós. O conjunto dos nós gera a malha cuja eficiência dependerá da adaptação do refinamento feito, o qual depende de operações aritméticas, que são proporcionais ao elemento finito. A malha apresenta vários tipos de modelamento, em especial o triangular, quadrilátero, entre outros (OWEN, 1998). Por conta dessas subdivisões da geometria, os modelos das equações matemáticas não terão resultados exatos, porém alcançarão resultados aproximados com boa precisão, dependendo da quantidade de nós e do tamanho e dos tipos de elementos utilizados na malha.

Segundo a literatura de Chiaverini (1986), a essência do ensaio mecânico de flexão engastado consiste na indução de forças de compressão em uma parte da seção transversal da amostra onde as fibras são encurtadas enquanto a parte restante é submetida à força de tração onde as fibras são alongadas, e a linha onde as tensões se anulam é chamada de eixo neutro. Os dados obtidos por esse ensaio são bastante utilizados no projeto de molas, onde se é medido a deflexão máxima que elas suportam, também contribui para outras análises no comportamento dos materiais à flexão, como; composição química; tratamentos térmicos e serve de parâmetro de controle de qualidade para os materiais (GARCIA, 2000).

Os testes do ensaio em amostras com diferentes geometrias; circular, quadrada e triangular equilátera em questão é um fator que pode influenciar na divergência, ou não, de valores que serão obtidos. No trabalho de Ramos (2018) são abordados os resultados dos ensaios realizados em geometrias circulares e quadradas de um material cerâmico, o qual apresentou valores semelhantes de tensão em ambas geometrias, embora em formatos diferentes.

Na modelagem da Flexão Pura, para avaliação das tensões normais de flexão no dimensionamento de vigas ou eixos mecânicos, diversas considerações devem ser atendidas que são, de acordo com Shigley (1984), Norton (2013), Hibbeler (2010) e Beer et al. (2015): (a) Viga carregada no plano de simetria longitudinal que contém os eixos dos apoios, não produzindo esforços cisalhantes de torção; (b) Esforço Normal ( $N$ ), Esforço Cortante ( $V$ ), Momento Torçor ( $T$ ) nulos e Momento Fletor ( $M$ ) diferente de zero; (c) Seção transversal simétrica, de forma que o sistema de eixos utilizados coincidam com a direção dos momentos de inércia principais; (d) Material com comportamento homogêneo, isotrópico e elástico-linear que obedece a Lei de Hooke; (e) Hipótese de Navier-Bernoulli da Teoria de Euler-Bernoulli - que enuncia que as seções planas e perpendiculares ao eixo da viga não deformado permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado e válida para os casos de flexão pura e com boa aproximação para o caso geral de flexão composta para vigas esbeltas; (f) Regime de pequenas deformações e (g) dimensões da viga devem proporcionar a falha por flexão e não esmagamento. Dessa forma, tem-se a definição da Fórmula de Flexão; conforme Equação (1).

$$\sigma_{f_z} = \frac{M_x \cdot c}{I_x} = \frac{M_x}{w_x} \quad (1)$$

Onde,

$c$ – Maior distância da linha neutra a superfície da seção transversal, em $mm$ .	$M_x$ – Momento Fletor resultante, em $N \cdot mm$ . $w_x$ – Módulo de resistência à flexão, em $mm^3$ . $\sigma_{f_z}$ – Tensão normal de flexão, em $MPa$ .
$I_x$ – Momento de Inércia da seção transversal em relação a um eixo neutro que contém o centroide da seção, em $mm^4$ .	

No estudo da Flexão Pura Engastada, o Momento Fletor Resultante Máximo, pode ser calculado através da Equação (2). A Flecha Máxima, na situação estudada e observando-se as restrições e hipóteses simplificadoras de Shigley (1984), Norton (2013), Hibbeler (2010) e Beer et al. (2015) é dada pela Equação (3).

$$M_x = F \cdot L \quad (2)$$

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{FL^3}{E \cdot I_x} \quad (3)$$

Onde,

$E$  – Módulo de Elasticidade, em MPa.

$f$  – Flecha máxima de deslocamento, em mm.

$F$  – Carga de flexão aplicada, em N.

$I_x$  – Momento de inércia da seção transversal, em  $mm^4$ .

$L$  – Comprimento longitudinal da seção transversal entre o ponto de engaste e o ponto de aplicação da carga, em mm.

## METODOLOGIA

As dimensões das seções transversais (S.T.) quadrada (de aresta  $a$ ) e triangular equilátera (de aresta  $l$ ) foram calculadas e definidas de forma a apresentarem a mesma área transversal resistente de uma seção circular de  $\phi = 8 \text{ mm}$ ; igual a  $50,2655 \text{ mm}^2$ . Todas com comprimento longitudinal igual ( $L$ ) a 180 mm. Os parâmetros geométricos utilizados neste trabalho foram calculados conforme referências de Hibbeler (2010) e Beer et al. (2015) e encontram-se apresentados na Tabela 1.

**TABELA 1. Dimensões e Parâmetros Geométricos definidos e calculados para as S.T. em estudo.**

Fonte: Elaborada pelos autores.

Seção Transversal	Parâmetros Geométricos			
	Dimensões (mm)	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$I_x \text{ (mm}^4\text{)}$	$w_{x_{\min}} \text{ (mm}^3\text{)}$
Circular	$\phi = 8,0000$	50,2654	201,062	50,2655
Quadrada	$a = 7,0900$	50,2681	210,574	59,4001
Triangular Equilátera	$l = 10,7742$	50,2655	243,125	39,0843

O processo de análise por Elementos Finitos no software Autodesk Inventor Professional 2021<sup>®</sup> consiste na criação de um estudo estático; seleção, definição e ajuste das propriedades do material; adição de restrições e de esforços externos; seleção e ajuste nos critérios de convergência de malha e simulação e análise de resultados. O software, unicamente e por padrão, utiliza elementos tetraédricos parabólicos na criação da malha. Neste estudo, observando-se a maior região elástica e regime de pequenas deformações, utilizou-se o Aço SAE 1045 Temperado e Revenido, que a partir de resultados experimentais e literatura de Hibbeler (2010) e Beer et al. (2015), caracteriza-se por  $E = 200.000 \text{ MPa}$  e  $\sigma_e \approx 1400 \text{ MPa}$  (Tensão de escoamento de engenharia).

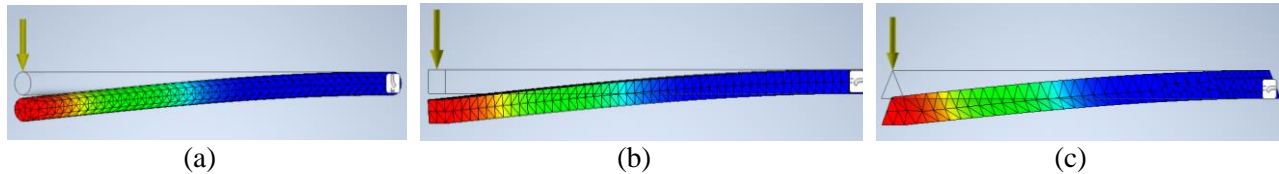
Após a criação das geometrias foi necessário determinar a carga máxima em flexão ( $F_e$ ) que as peças poderiam ser submetidas durante e análise, observando-se a permanência em regime elástico e pequenas deformações. Para isso, das propriedades mecânicas do Aço SAE 1045 Temperado e Revenido, das Equações (1) e (2), da Tabela 1 e no critério de dimensionamento da tensão admissível de flexão equivalente a tensão de escoamento do material  $\sigma_f \approx \sigma_e$ ; obteve-se os valores de: a)  $F_e = 390,950 \text{ N}$  para a seção circular; b)  $F_e = 462,001 \text{ N}$  para a seção quadrada e c)  $F_e = 1579,212 \text{ N}$  para seção triangular equilátera.

Como o objetivo deste trabalho é analisar o comportamento e resposta mecânica de cada seção transversal, faz-se necessário a padronização da carga de flexão escolhida; de forma que  $F_e \leq 390,950 \text{ N}$ . Para a etapa de validação analítico-numérica de resultados, objetivando preservar as características de pequenas deformações em regime elástico, adotou-se o valor de  $F_e = 390 \text{ N}$ .

Prosseguindo na construção do estudo, tem-se a adição de uma restrição fixa (engaste) em uma face do corpo; com a adição de carga de flexão  $F_e$  no centro da face oposta. Assim, após a definição e ajuste das propriedades do material em estudo, aplicações de restrição física e da carga fletora, tem-se a análise de malha. O software utilizado cria uma malha padrão a partir das configurações de convergência com número máximo de tentativas/iterações de refinamento (h) igual a 2 e critério de interrupção de simulação com 10% de diferença entre resultados simulados ou até o valor de h. Além da malha padrão gerada pelo software, através de alterações nas configurações de convergência, utilizou-se uma malha com maior refinamento, de forma a estudar a influência da malha nos resultados das simulações e avaliar os eventuais ganhos de precisão alcançados. A nova configuração de convergência utilizada consistiu na alteração do número máximo de

tentativas de refinamentos para 10 e critério de interrupção de simulação igual a 0,1% para as S.T. circular e triangular equilátera e 0,05% para a S.T. quadrada. Em ambas as malhas utilizadas, manteve-se o limiar de refinamento de  $h$  em 0,75 (ou seja, refinamento localizado de 25% dos elementos com maiores erros) e convergência baseadas no deslocamento.

A Figura 1 apresenta, de forma esquemática, para as seções transversais em estudo, a forma de modelagem e os resultados das simulações apresentados pelo software Autodesk Inventor Professional 2021®. Observando-se a aplicação da restrição fixa de engaste na face direita e da carga de flexão na face esquerda.



**Figura 1 – Seções transversais a) circular, b) quadrada e c) triangular equilátera simuladas pelo software Autodesk Inventor Professional 2021®.**

**Fonte: Elaborada pelos autores.**

A validação analítico-numérica dos resultados baseou-se nos resultados da tensão normal de flexão na direção  $z$ , conforme construção das geometrias e flecha; ambos fornecidos diretamente pelo relatório de resultados do software, respectivamente, em Tensão ZZ e Deslocamento. Os resultados analíticos calculados através das Equações (1) a (3) foram utilizados como referência de comparação para estudo e análise de erros e validação analítico-numérica. Destacando-se que a aplicação da Fórmula de Flexão é válida unicamente para o plano de simetria das peças simuladas e eventuais erros são esperados pelas limitações e hipóteses simplificadoras utilizadas na própria modelagem e formulação analítica.

A avaliação dos erros quanto a tensão de flexão máxima ( $\sigma_{f\text{ máx}}$ ) e a flecha ( $f$ ) ocorre, respectivamente  $Erro_{\sigma_{f\text{ máx}}}$  (%) e  $Erro_f$  (%), através das Equações (13) e (14). Onde  $\bar{\sigma}_{f\text{ máx}}$  é a média das tensões máximas em flexão, em MPa, calculada analiticamente da Equação (1) e obtida das simulações numéricas. A flecha média é representada por  $\bar{f}$ , avaliada através do deslocamento obtido nas simulações numéricas, em mm.

$$Erro_{\sigma_{f\text{ máx}}} (\%) = \frac{|\sigma_{f\text{ máx}} - \bar{\sigma}_{f\text{ máx}}|}{\sigma_{f\text{ máx}}} \cdot 100\% \quad (13) \quad Erro_f (\%) = \frac{|f - \bar{f}|}{f} \cdot 100\% \quad (14)$$

Após a etapa de validação analítico-numérica dos resultados, tem-se a etapa final de estudo comparativo da resposta mecânica de cada uma das diferentes seções transversais estudadas. Do valor de  $F_e \leq 390,950 \text{ N}$ , adotou-se 5 valores comuns de cargas de flexão para as seções estudadas; iguais a 80, 160, 240, 320 e 390 N. Conforme resultados das análises de erro e validação analítico-numérica definiu-se, de forma padrão em termos de refinamento, a malha utilizada para as seções transversais. Dos resultados obtidos, plotou-se o gráfico da força em N versus flecha em mm ( $F \times f$ ) para melhor visualização, análise e discussão.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para análise de erros e de influência do refinamento das malhas e validação analítico-numérica dos resultados obtidos e conforme metodologia de modelagem e cálculos descritos, tem-se a Tabela 2.

**TABELA 2. Resultados numéricos e analíticos por seção transversal para análise e validação de resultados.**

**Fonte: Elaborada pelos autores.**

Seção Transversal	Nº de Nós	Resultados Analíticos		Resultados Numéricos		$Erro_{\sigma_{f\text{ máx}}} (\%)$	$Erro_f (\%)$
		$\sigma_{f\text{ máx}}$ (MPa)	$f$ (mm)	$\bar{\sigma}_{f\text{ máx}}$ (MPa)	$f$ (mm)		
Circular	3598	1396	18,853	1486	18,862	6,44 %	0,047 %
	13438			2090	18,862	49,71 %	0,047 %
Quadrada	2701	1181	18,002	1358	17,983	14,98 %	0,105 %
	4847			1896	17,983	60,54 %	0,105 %
Triangular Equilátera	1005	1796	15,592	1471	15,585	18,09 %	0,044 %
	1621			1810	15,591	0,78 %	0,006 %

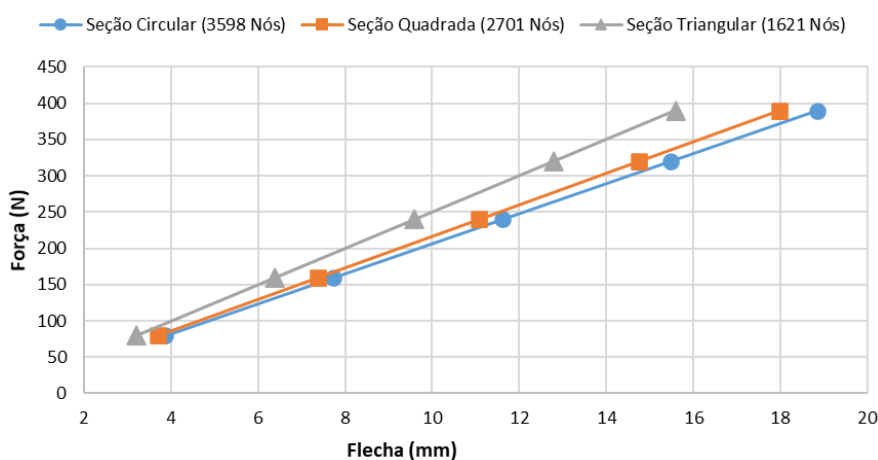
Da análise da Tabela 2 é possível observar uma excelente concordância de resultados analíticos e numéricos, com erros da ordem mínima de 0,78% para a  $\sigma_{f\text{máx}}$  e 0,006% para a  $f$ , ambas na seção triangular equilátera. Validando, assim e nas condições estabelecidas de regime linear com pequenas deformações, o processo de simulação do fenômeno da Flexão Engastada pelo MEF do software Autodesk Inventor Professional 2021®; especialmente em malhas menos refinadas.

Da análise dos resultados da  $\sigma_{f\text{máx}}$ , é possível observar que o refinamento da malha, excetuando-se a geometria triangular, aumentou os erros numéricos da simulação. Tal resultado está relacionado ao aumento do número de elementos e nós e consequente redução da área de alguns elementos (especialmente na região do engastamento). Dessa forma, considerando-se que os valores de carga por elemento calculados permanecem aproximadamente iguais aos da malha menos refinada e relação inversa entre tensão e área resistente, tem-se a presença de saltos de discontinuidades e elevações abruptas nos valores da tensão de flexão calculada; que podem ser vistos na Tabela 2 e nos gráficos de convergência apresentados pelo software. No entanto, os resultados em relação a flecha permanecem excelentes, visto que o refinamento ocorre de forma acentuada unicamente na face oposta da aplicação da carga.

Importante destacar que a seção quadrada apresentou os maiores erros, o que é justificado pela presença de “cantos vivos”, que tendem naturalmente a deformar e deslocar o campo de tensões e deformações e exigem maior refinamento na região; aumentando ainda mais os erros numéricos de descontinuidade na avaliação da  $\sigma_{f\text{máx}}$ .

Das análises realizadas – observando-se critérios de precisão, menor esforço computacional demandado e da análise principal na flecha – optou-se, para os estudos comparativos de resposta mecânica das seções transversais, pela utilização de malhas mais grosseiras para as seções transversais circular e quadrada e da malha mais refinada para a seção triangular equilátera.

Para a análise final comparativa de resposta das seções transversais, tem-se a Figura 2.



**Figura 2 – Gráfico da Força (N) x Flecha (mm) para as S.T. estudadas.**

**Fonte: Elaborada pelos autores.**

O comportamento linear observado na Figura 2 confirma o regime elástico de deformações; conforme hipóteses e equações de modelagem aplicadas.

Para a mesma flecha imposta, verifica-se, em ordem decrescente quanto ao esforço aplicado, as seções triangular equilátera, quadrada e circular – o que é justificado pela relação direta entre carga e momento de inércia; ou seja, quanto maior o momento de inércia da seção, maior a carga de flexão necessária para a mesma atingir a mesma flecha. Da análise da mesma carga, em ordem crescente de deformação, tem-se a mesma ordem anterior de seções transversais; o que é justificado pela relação inversa entre a flecha e o momento de inércia. Dessa forma, é possível classificar, em ordem crescente de resistência à flexão e decrescente quanto a capacidade de deformação, as seções triangular equilátera, quadrada e circular.

Importante destacar também que seções circular e quadrada apresentaram comportamento mecânico bastante semelhante e com curvas quase justapostas, justificando-se tal resultado pela quase equivalência dos momentos de inércia, conforme Tabela 1. No entanto, a seção quadrada tende a apresentar menor resistência e maior fragilidade, visto a presença de concentradores de tensão dos vértices de deslocamento e distorção dos campos de tensão e deformação nessas regiões.

Das Equações (1) e (3) e dos parâmetros geométricos da Tabela 1 é possível prever, para a mesma flecha imposta, em ordem decrescente de tensão máxima de flexão, as seções triangular, quadrada e circular; resultado justificado pela relação direta de proporcionalidade entre o momento de inércia, carga aplicada e tensão de flexão, para a mesma flecha imposta. Para o mesmo estado de tensão e carga impostos, é possível prever, em ordem crescente de deslocamento, a mesma ordem de seções transversais; justificando-se esse comportamento pela relação inversa de proporcionalidade da flecha com o momento de inércia e módulo de resistência à flexão. Tal resultados confirmam, sob a óptica das tensões de flexão, a ordem de resistência mecânica e menor capacidade de deformação das seções triangular equilátera, quadrada e circular discutida anteriormente, conforme apresentado pela literatura especializada (GARCIA, 2000). Tais resultados também são justificados com base nas propriedades de inércia das seções transversais e caminho no mesmo sentido da literatura de Hibbeler (2010) e Beer et al. (2015).

## CONCLUSÕES

A partir dos resultados e discussões apontadas tem-se a validação analítico-numérica, com excelente precisão, da formulação e análise por Elementos Finitos do software Autodesk Inventor Professional 2021<sup>®</sup> para o estudo da flexão pura engastada em seções circular, quadrada e triangular equilátera no regime elástico em pequenas deformações.

Malhas mais refinadas, excetuando-se a seção triangular equilátera, mostraram-se ineficientes pelos maiores erros obtidos na descrição das tensões de flexão (especialmente pelas distorções e descontinuidades causadas na região do apoio fixo), inexpressivos ganhos de resultados na descrição da flecha e aumento considerável da potência computacional demanda.

A seção transversal triangular equilátera apresentou melhores resultados quanto ao comportamento mecânico de maior resistência à flexão e menor capacidade de deformação; seguida da seções quadrada e circular, nessa ordem.

## REFERÊNCIAS

- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM E855:2013**: Standard Test Methods for Bend Testing of Metallic Flat Materials for Spring Applications Involving Static Loading, 9p., 2013.
- BEER, F. P. et al., **Mecânica dos Materiais**, 7ªed., Porto Alegre: McGraw-Hill Education, 2015.
- CHIAVERINI, V. **Tecnologia mecânica**. 2ª ed., São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1986.
- GATTASS, M., **CIV 2118 – Método dos Elementos Finitos**. Rio de Janeiro – RJ. Ago. 1994
- GARCIA, A.; **Ensaio dos Materiais**. LTC: Rio de Janeiro, 1ª Edição, 2000.
- HIBBELER, R. C., **Resistência dos Materiais**, 7ªed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010
- LOPES, K. B. et al., **Avaliação in vitro da resistência à flexão de um protótipo de mini-implante desenvolvido para ancoragem do aparelho de Herbst**, Dental Press Journal of Orthodontics, vol 15, Maringá, July. 2010.
- MESQUITA, L. R. **Desenvolvimento e propriedades mecânicas da placa óssea bloqueada em formato T**. 2015. 80 f.
- NORTON, R. L., **Projeto de Máquinas: uma abordagem na integrada**, 4. ed., Porto Alegre: Bookman, 2013.
- OWEN, S.J., **A survey of unstructured mesh generation technology**, in: Proc. 7th Internat. Meshing Roundtable, Dearborn, MI, USA, October 1998.
- RAMOS, J. da S. et al. **Influence of the geometry of ceramic specimens on biaxial flexural strength: experimental testing and finite element analysis**. Cerâmica 64 (2018) 120-125. Santa Maria-RS, Brasil.
- SHIGLEY, J. E., **Elementos de Máquinas**, vol. 1, 3. ed., Rio de Janeiro: LTC, 1984.