V Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
V EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
22 e 23 de outubro de 2020

Equações Diferenciais Fracionárias: Um Estudo Numérico

Marcelo Andrioli Junior[1], Marco Aurélio Granero[2], Flávia Milo dos Santos[2].

[1]Graduando em Licenciatura em Matemática, Bolsista PIBIFSP, IFSP - Câmpus São Paulo, maarcelinhujr@gmail.com
[2]IFSP – Câmpus São Paulo.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Análise – 1.01.02.00-0

RESUMO: Este trabalho apresenta o estudo numérico para a obtenção de soluções numéricas das Equações Diferenciais Fracionárias (EDF) através da discretização da derivada fracionária segundo a formulação de Grünwald-Letnikov (GL). Nesta formulação as condições iniciais dos Problemas de Valores Iniciais Fracionários (PVIF) são todas nulas. Também são apresentadas soluções analíticas, quando possível, para a comparação com as soluções numéricas.

PALAVRAS-CHAVE: derivada fracionária; formulação Grünwald-Letnikov; função Mittag-Leffler; métodos numéricos; problema de valor inicial fracionário.

INTRODUÇÃO

O cálculo fracionário é um tópico da Matemática que vem sendo estudado há mais de 300 anos. Ele é entendido como a generalização das operações de integração e derivação para ordens não-inteiras (arbitrárias). Ross (1975) argumenta que o cálculo fracionário tem sua origem ligada a uma troca de correspondências entre Leibniz e L'Hospital, na qual Leibniz questiona uma possível generalização da ordem da derivada. Ainda nesta correspondência, L'Hospital pergunta a Leibniz sobre a derivada de ordem $\frac{1}{2}$. Ao passo que Leibniz, em 1695, responde que isso levará a um paradoxo que trará consequências frutíferas.

Desde então, nos últimos 300 anos, diversos matemáticos têm contribuído com o desenvolvimento desta área, como Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Abel, Grünwald, Letnikov, Leibniz entre outros.

Atualmente o cálculo fracionário tem sido utilizado como ferramenta para solução de problemas aplicados em áreas da ciência, como a Física, a Biologia, a Engenharia, entre outras, como visto em Podlubny (1999). O resultado destes trabalhos pode ser resumido no estudo das chamadas as Equações Diferenciais Fracionárias (EDF) e a busca por métodos e teorias que sustentem a existência de suas soluções tem sido uma área de estudo bastante fértil.

Além disso, a busca por soluções numéricas também tem ganhado destaque conforme apontam os trabalhos de Petras (2011), Li et al (2011), Dimitrov (2014), Dimitrov (2018) e Dimitrov et al (2018).

Diante do exposto esse trabalho tem como objetivo descrever os procedimentos envolvidos na implementação numérica das soluções EDF's, bem como descrever o processo de obtenção dessas soluções. Para isto, inicialmente é apresentada a fundamentação teórica responsável por direcionar e definir os principais resultados acerca do cálculo fracionário e da implementação numérica de EDF's. A seguir tem-se a metodologia adotada para o desenvolvimento dos objetivos do trabalho. Na sequência são apresentados e discutidos os resultados do processo de implementação numérica dos problemas selecionados, finalizando com as conclusões e perspectivas futuras.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção são apresentados os conceitos e definições essenciais bem como a teoria do cálculo fracionário necessária para a resolução das EDF's, com referência nos trabalhos de Camargo e Oliveira (2015), Podlubny (1999), Samko e Kilbas (1993), Dimitrov (2018) e Petras (2011).

Função Gama

A função gama segundo Petras (2011) é a função mais importante dentre as usadas no cálculo fracionário, ela é vista como a generalização da função fatorial, e é definida através da equação (1):

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t} dt. \tag{1}$$

Para o caso particular de $n \in \mathbb{N}$, é possível observar que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ e $\Gamma(1) = 1$ demonstrando que:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,. \tag{2}$$

Funções de Mittag-Leffler

Outras funções de grande importância para o cálculo fracionário são as funções de Mittag-Leffler, conhecidas como a generalização da função exponencial. Estas funções são de grande importância, pois as soluções das Equações Diferenciais de Ordem Inteira podem ser expressas em termos da função exponencial, e as EDF's terão suas soluções expressas em termos da função de Mittag-Leffler.

As funções de Mittag-Leffler são definidas em função do número de parâmetros que possuem e, para o escopo deste trabalho será utilizada apenas a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros definida por:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \tag{3}$$

tais que os parâmetros α e β são valores complexos cujas partes reais são não-negativas e $z \in \mathbb{C}$.

Para o caso particular $\beta = 1$ tem-se a função de Mittag-Leffler de um parâmetro

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z), \tag{4}$$

e, no caso restrito, para $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ tem-se a função exponencial, ou seja

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \tag{5}$$

Miller e Ross (1993) apresentam outra importante função utilizada na obtenção das soluções das EDF's. Esta função é um caso particular da função de Mittag-Leffler e é definida por:

$$\varepsilon_k(t, \lambda; \mu, v) = t^{\mu k + v - 1} E_{\mu,v}^{(k)}(\lambda t^\mu). \tag{6}$$

Derivadas Fracionárias

O cálculo fracionário apresenta diferentes formulações para as operações de integração e derivação para uma ordem arbitrária. Dentre as diferentes formulações para os operadores de derivação destacam-se as formulações de Grünwald-Letnikov (GL), Rieman-Liouville (RL) e Caputo. Porém, existem outras formulações, como as de Liovuille, Riesz, Weyl, Marchaud, Hilfer, Katugampola, entre outras. Este trabalho usará principalmente a formulação de GL, pelo fato de que para uma grande classe de funções essas três formulações (GL, RL e Caputo) são equivalentes sob algumas condições.

A derivada fracionária de GL é dada por

$$_aD_t^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh). \tag{7}$$

Para obtenção das soluções de Equações Diferenciais de Ordem inteira e para EDF's, uma técnica muito eficiente é a Transformada de Laplace. Porém nas EDF's a transformada é mais efetiva em equações relativamente simples, por conta da dificuldade no cálculo de sua transformada inversa. Esse problema pode ser solucionado pela aplicação de algoritmos que implementem numericamente a inversa da Transformada de Laplace, conforme descrito em Sheng et.al (2011).

A transformada de Laplace para a função ε, equação (6), que será utilizada adiante é dada pela equação (8):

$$L(\varepsilon_k(t, \pm\lambda; \alpha, \beta) = \frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^{k+1}}. \tag{8}$$

METODOLOGIA

Após a realização de uma pesquisa bibliográfica sobre a teoria do cálculo fracionário, ou seja, sobre diferentes formulações de derivadas e integrais fracionárias em um projeto de iniciação cientifica, surgiu o interesse de continuar a pesquisa, com um olhar para o aspecto numérico do cálculo fracionário. Assim utilizando a formulação de GL, foram implementadas numericamente a resolução de EDF's, como será visto na seção Resultados e Discussão, com todas as condições iniciais iguais a zero, de acordo com o trabalho de Petras (2011). Além disso, procurou-se comparar as soluções numéricas com as soluções analíticas, quando possível.

Método de GL

O método de GL tem como objetivo discretizar a equação (7) que calcula a derivada fracionária segundo a formulação de GL, que é dada por:

$$D_{t_k}^{q} \approx h^{-q} \sum_{j=0}^{k} c_j^{(q)} f\left(t_{k-j}\right), \tag{9}$$

onde $t_k = kh$, h é o passo e $c_j^{(q)} (j = 0,1, \dots, k)$ são os coeficientes binomiais, calculados através da equação (10):

$$c_0^{(q)} = 1, c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}\,. \tag{10}$$

Esses coeficientes podem ser expressos utilizando a função gama como:

$$(-1)^j \binom{q}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)} = \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)}. \tag{11}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção do trabalho é apresentada a forma geral de uma Equação Diferencial Fracionária (EDF). A seguir é apresentada a formulação numérica para a solução das EDF's, seguidas de alguns exemplos. Por fim é realizada uma discussão acerca dos resultados numéricos obtidos e da comparação entre a solução exata e numérica quando possível.

Equações Diferenciais Ordinárias Fracionárias (EDF's)

Uma EDF é uma equação dada da seguinte forma

$$a_n D_t^{\alpha_n} y(t) + \cdots + a_1 D_t^{\alpha_1} y(t) + a_0 D_t^{\alpha_0} y(t) = u(t), \tag{12}$$

onde a_i ($i = 0,1, \dots, n$) são os coeficientes e α_i é a ordem da derivada de cada termo da equação, $y(t)$ é a função procurada ou a solução e $u(t)$ é a função que representa o termo de não-homogeneidade.

Neste trabalho serão discutidas as soluções de equações de dois termos e três termos, ou seja, EDF's com as seguintes formas:

$$a D_t^{\alpha} y(t) + b y(t) = u(t), \tag{13}$$

e

$$a_2 D_t^{\alpha_2} y(t) + a_1 D_t^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = u(t). \tag{14}$$

Implementação Numérica

A solução numérica para as EDF's de dois e três termos, equações (13) e (14), é obtida a partir da implementação da derivada fracionária segundo a formulação de GL, equação (9).

Deste modo, substituindo (9) em (14) obtém-se:

$$\frac{a_2}{h^{\alpha_2}} \sum_{j=0}^{k} q_j^{(\alpha_2)}\, y(t_k - j) + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} \sum_{j=0}^{k} q_j^{(\alpha_1)}\, y(t_k - j) + a_0 y(t_k) = u(t_k), \tag{15}$$

onde $t_k = kh$ $(k = 1,2, \dots, N)$ e $q_j^{(\alpha)}$ $(j = 0,1,2, \dots, k)$ são os coeficientes binomiais calculados de acordo com a equação (10) ou (11).

Rearranjando os termos da equação (15) de modo a explicitar $y(t_k)$ tem-se que a solução numérica de (14) é dada por:

$$y(t_k) = \frac{u(t_k) - \frac{a_2}{h^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^{k} q_j^{(\alpha_2)}\, y(t_k - j) - \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^{k} q_j^{(\alpha_1)}\, y(t_k - j)}{\frac{a_2}{h^{\alpha_2}} + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} + a_0}, \tag{16}$$

onde $k = 1,2, \dots, N$ para $N = \frac{T}{k}$ com T sendo o limitante superior do intervalo de interesse.

A solução numérica da EDF de dois termos é obtida a partir da equação (16), tomando o caso particular de $\alpha_1 = \alpha$, $a_2 = 0$, $a_1 = a$ e $a_0 = b$.

Solução exata da EDF de dois termos

Considerando uma EDF de dois termos, com coeficientes constantes, $u(t) = C$, onde C é uma constante real não-nula e condição inicial igual a zero, $y(0) = 0$, obtém-se de (13)

$$aD_t^\alpha y(t) + by(t) = C. \tag{17}$$

A solução exata de (17) pode ser obtida através do método da transformada de Laplace e, com o auxílio das equações (6) e (8), na variável t, por (PETRAS, 2011):

$$y(t) = \frac{C}{a}\varepsilon_0\left(t, -\frac{b}{a}; \alpha, \alpha+1\right) = \frac{C}{a}t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\frac{b}{a}t^\alpha\right). \tag{18}$$

Resultados Numéricos

A seguir são apresentadas e discutidas as soluções numéricas de Problemas de Valores Iniciais Fracionários (PVIF's) envolvendo EDF's de dois e três termos, definidas pelas equações (13) e (14), obtidas através da implementação numérica em MATLAB da equação (16). Cabe destacar que, a formulação de GL considera todas as condições iniciais nulas na resolução dos PVIF's.

Exemplo 1: Considerando a equação (17) da EDF de dois termos com $a = 5$, $b = 1$, $C = 1$ e $\alpha = \{ 0{,}25;\ \ 0{,}5;\ \ 0{,}75 \}$ obtém-se a EDF:

$$5y^{\alpha_i}(t) + y(t) = 1, \tag{19}$$

cuja representação gráfica pode ser observada na Figura 1.

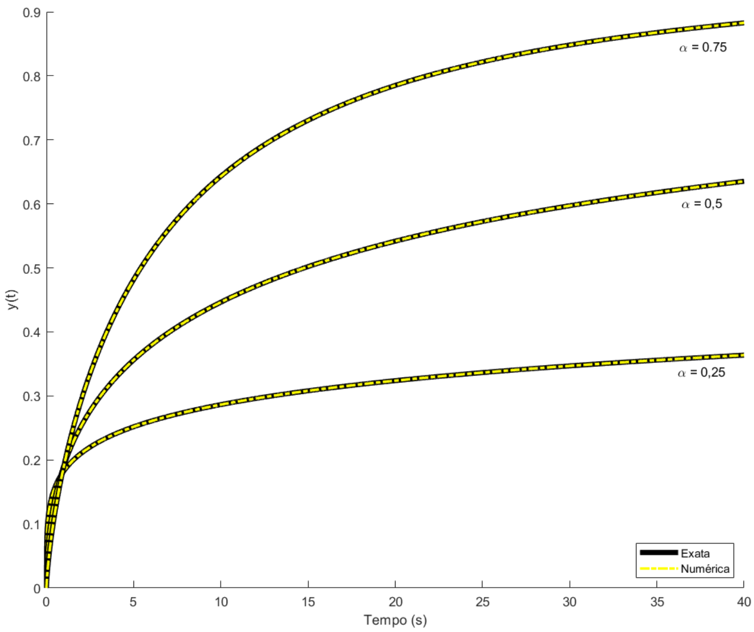

Figura 1: Soluções, exatas e numéricas, da equação (19).

Na Figura 1 é possível observar que, conforme o valor α se aproxima de 1, as curvas se assemelham cada vez mais à equação de carga de um capacitor, além disso é possível ver que a solução numérica coincide com a solução exata, para todos os valores de α adotados no exemplo.

Exemplo 2: Ainda considerando a equação (17) da EDF de dois termos, agora com $a = 2$, $b = 1$, $C = 1$ e $\alpha = 1{,}5$, obtém-se a EDF:

$$2y^{1{,}5}(t) + y(t) = 1, \tag{20}$$

cuja solução exata é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(t; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}t^{1{,}5}E_{1{,}5;2{,}5}\left(-\frac{1}{2}t^{1{,}5}\right) = \frac{1}{2}t^{1{,}5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(1{,}5k + 1{,}5)}. \tag{21}$$

A Figura 2 apresenta as soluções numérica e exata de (20).

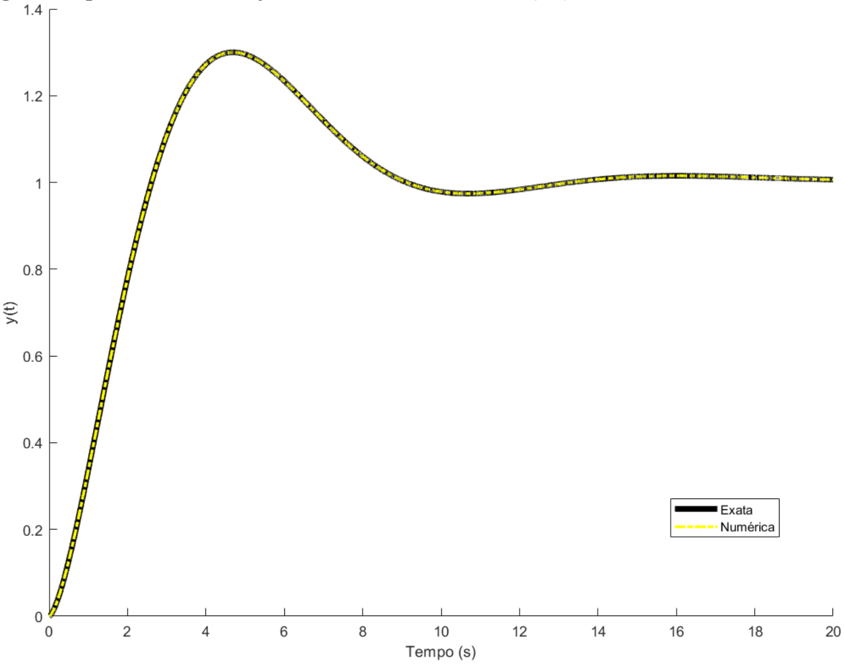

Figura 2: Solução, exata e numérica, da equação (17), com $a = 2$, $b = 1$, $C = 1$ e $\alpha = 1{,}5$.

É possível observar na Figura 2 que, para este caso, a solução numérica coincide com a solução exata. Percebe-se também que a curva da solução apresenta certa semelhança com a curva de um oscilador harmônico crítico.

Exemplo 3: Considerando a EDF com três termos, definida por (13), e tomando o caso particular quando $a_2 = 0{,}8$; $a_1 = 0{,}5$; $a_0 = 1$; $\alpha_2 = 2{,}2$; $\alpha_1 = 0{,}9$ e $u(t) = 1$, obtém-se:

$$0{,}8y^{2,2}(t) + 0{,}5y^{0,9}(t) + y(t) = 1, \quad (22)$$

cuja solução numérica pode ser observada na Figura 3.

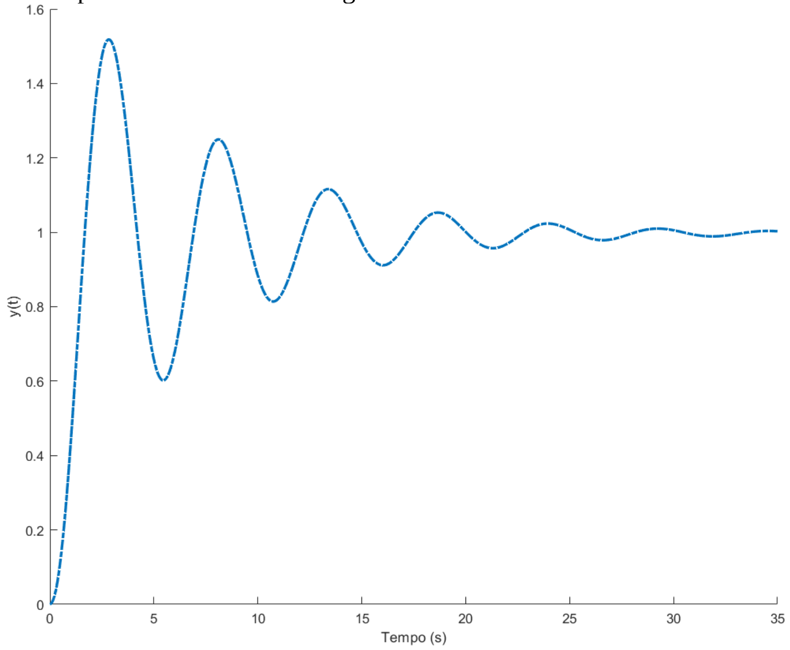

Figura 3: Solução numérica da equação (22).

Na equação (22), com $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_1 = 1$ tem-se a equação do oscilador harmônico amortecido. No entanto, mesmo com ordens de derivadas não inteiras, ainda é possível visualizar uma oscilação amortecida em torno de $y(t) = 1$.

De um modo geral, é possível observar e relacionar as soluções numéricas da EDF's a diferentes problemas físicos, uma vez que estas apresentam um comportamento parecido com suas versões de ordem inteira, o que pode sugerir que estas englobam características não representadas, por exemplo o efeito de memória, como é visto em Petras (2011).

CONCLUSÕES

O cálculo fracionário tem sido aplicado a diferentes fenômenos nas áreas de Física, de Biologia, de Engenharia, por exemplo. Deste modo, a busca por soluções numéricas de equações envolvendo derivadas fracionárias torna-se um campo de pesquisa fértil, no que diz respeito ao seu desenvolvimento, para a compreensão e o entendimento de tais fenômenos.

A respeito dos resultados obtidos é possível perceber que soluções de EDF's se comportam de forma semelhante a versões de ordem inteira, o que torna esses resultados intrigantes, pois em Petras (2011) são encontradas características que não estão presentes nas formulações de ordem inteira e que contribuem para a compreensão de diferentes problemas físicos.

Como trabalhos futuros pretende-se estudar os osciladores harmônicos através da coleta de dados experimentais e da formulação fracionária, utilizando as EDF's e a implementação numérica para a comparação dos dados experimentais e suas soluções.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a instituição que fomentou a bolsa de iniciação científica para o desenvolvimento deste projeto.

REFERÊNCIAS

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de. **Cálculo Fracionário**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DIMITROV, Y.; DIMOV, I.; TODOROV, V. **Numerical Solutions of ordinary fractional differential equations with singularities**. Efficient Numerical Methods with an Improved Rate of Convergence for Applied Computational Problems. Bulgarian Academy of Sciences. Jun. 2018.

DIMITROV, Y. **Numerical Approximations for fractional differential equations. Journal of Fractional Calculus and Applications**. v.5. p.1-45. 2014.

DIMITROV, Y. **Approximations for the Caputo derivative.** Journal of Fractional Calculus and Applications. v.9. p.35-63. 2018.

LI, C. et al. **Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation.** Journal of Computational Physics. 2011.

MILLER, K. S.; ROSS, B.; **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.** John Wiley & Sons INC. 1993.

PETRÁS, I. **Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab**, Engineering Education and Research Using MATLAB, Dr. Ali Assi (Ed.), ISBN: 978-953-307-656-0, InTech, 2011. Disponível em: http://www.intechopen.com/books/engineering-education-and-research-usingmatlab/
fractional-derivatives-fractional-integrals-and-fractional-differential-equations-in-matlab.
Acesso em: 20 de maio de 2020.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. Mathematics in Science and Engineering. v.198. San Diego, California-USA, Academic Press. 1999.

SAMKO, S.; KILBAS, A.; MARICHEV, O. **Fractional Integrals and Derivatives: Theoryand Applications**. 1. ed. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers S.A.,1993.

SHENG, H. et al. **Application of numerical inverse Laplace transform algorithms in fractional calculu**s, *J. Franklin Inst.*, v. 348, 315–330. 2011.