V Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
V EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Câmpus Araraquara
22 e 23 de outubro de 2020

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

LUCAS SOUZA NICACIO DA SILVA[1], FLÁVIA MILO DOS SANTOS[2], MARCO AURÉLIO GRANERO[2]

[1]Licenciado em Matemática, IFSP Campus São Paulo, lucas.nicacio21@hotmail.com
[2]IFSP – Campus São Paulo

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Análise Numérica – 1.01.04.02.0

RESUMO: O presente trabalho tratará de discorrer sobre a temática de resolução de sistemas não lineares, enfatizando a representação gráfica das bacias de atração, objetivando o estudo e implementação numérica do método de Newton para a resolução desses sistemas. A implementação numérica foi feita por meio do software Matlab, com isso foi possível observar o comportamento das bacias de atração de um sistema de raízes complexas associado a um polinômio de grau cinco, destacando a obtenção de representações gráficas das bacias de soluções do sistema não linear, que se enquadra na definição de fractal.

PALAVRAS-CHAVE: fractal; método de Newton; métodos numéricos; sistemas não lineares

INTRODUÇÃO

De acordo com Brasil et al. (2015), Burden et al. (2015) e Kozakevich (1995), pode-se modelar diversos fenômenos e problemas práticos com a utilização de sistemas não lineares. De maneira geral, métodos numéricos são necessários para resolução de tais sistemas.

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho se deu com o interesse de investigar, conforme apontado por Santos (1993), que se existir um ponto que é razoavelmente próximo de uma solução de um sistema, o método iterativo escolhido então irá convergir para tal solução. Contudo, segundo Santos (1993), não existem garantias de convergência para pontos que não estejam próximos o bastante e, para dimensões maiores ou iguais a 2, têm-se uma "[...] região que 'atrai' a sequência gerada pelo método iterativo se o ponto inicial estiver nessa região" (SANTOS, 1993, p. 102).

Desta forma caracteriza-se como objetivo principal deste trabalho apresentar os resultados gráficos das bacias de atração de um sistema não linear resolvido por meio do método de Newton.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O trabalho foi desenvolvido tomando por base inicial o artigo escrito por Santos (1993), tendo como referencial de aprofundamento no entendimento da convergência a pesquisa desenvolvida por Ruggiero (1990) e a obra de Dennis e Schnabel (1996). Para o entendimento dos métodos de resolução, de uma forma mais geral, o trabalho se baseia nas referências de Brasil et al. (2015), Burden et al. (2015) e Kozakevich (1995). No sentido de compreender a implementação de algoritmos e as especificidades entre os métodos destaca-se Ruggiero e Lopes (1996) e Cunha (2000). Em se tratando do estudo das representações gráficas o trabalho teve como aporte teórico Spengler (2014). Para atingir os objetivos deste trabalho, inicialmente será apresentado um breve estudo dos aspectos teóricos do método de Newton e sua convergência, seguido pelo desenvolvimento e implementação numérica do método no Matlab.

METODOLOGIA

O trabalho se caracteriza, conforme Marconi e Lakatos (2004), como sendo uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório sobre sistemas não lineares e sua resolução, tendo como ponto de partida um projeto de Iniciação Científica desenvolvido pelos autores deste trabalho.

Um sistema de n equações e n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado de não linear se uma ou mais equações são não lineares. As soluções de tais sistemas consistem em resolver

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

de modo a determinar valores $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, tais que:

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Tomando por base o método de Newton, Cunha (2000) explicita que a finalidade do método é uma linearização, ou seja, uma aproximação linear para valores de $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ que garantem a solução aproximada de (2).

Segundo Cunha (2000) e Ruggiero (1990), o modelo local linear para $F(x)$ em torno da aproximação conhecida $x^{(k)}$ será expresso por:

$$F(x) \approx L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}). \tag{3}$$

Dessa forma, a aproximação $x^{(k+1)}$ será:

$$L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0 \tag{4}$$

onde $J(x)$ é a matriz Jacobiana de $F(x)$, definida da forma (BURDEN et al., 2015):

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

considerando $f: C \to \mathbb{R}^m$, $C \subset \mathbb{R}^n$, diferenciável para que as derivadas ${\partial f_j}/{\partial x_k}$ existam.

A avaliação da matriz Jacobiana em $x^{(k)}$ e a resolução do sistema linear

$$J(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)}) \tag{6}$$

resultam em um grande custo computacional, para isso pode-se simplificar (5), segundo Cunha (2000), utilizando o método de diferenças finitas, desta forma obtém-se uma discretização de $J(x)$.

A matriz Jacobiana pode também ser avaliada uma única vez, ou seja, é adotada uma matriz fixa para todas as iterações. Esse método é conhecido como método de Newton modificado. Nesse caso, é recomendável a utilização da fatoração LU para resolução do sistema (6) (CUNHA, 2000; RUGGIERO; LOPES, 1996).

Outros métodos muito empregados na resolução de sistemas de equações não lineares são os métodos quase-Newton, um dos quais é o método de Broyden, que tem por objetivo reduzir o esforço computacional substituindo a matriz Jacobiana $J(x)$ por uma aproximação $B(x)$, sem perder as propriedades de convergência do método de Newton (BROYDEN, 1965; DENNIS; MORE, 1977; MARTINÉZ; SANTOS, 1995; RUGGIERO, 1990; RUGGIERO; LOPES, 1996, SANTOS, 2016).

Retomando o que foi dito na introdução deste trabalho, que nem todas as aproximações que não fazem parte de uma região específica convergirão para uma solução do sistema, pode-se então concluir que a convergência é, segundo Ruggiero (1990), local.

Em se tratando agora sobre a questão de implementação e representação gráfica foi desenvolvido um algoritmo para o método de Newton no Matlab e de maneira orientada por Spengler (2014) para compreensão dos resultados a seguir. No algoritmo utilizado é considerado uma malha variável de pontos (x, y), onde cada ponto representa uma aproximação inicial. O algoritmo então calcula em cada ponto dessa malha uma estimativa e considera, de acordo com Ruggiero e Lopes (1996), como critério de parada as seguintes condições:

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon \ \text{ e } \ \left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\|_\infty < \varepsilon \tag{7}$$

sendo no caso deste algoritmo $\varepsilon = 10^{-6}$ e um número máximo de 1000 iterações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Objetivando-se analisar as raízes de um polinômio nas bacias de atração, foi feita a escolha do polinômio $p(z) = z^5 - 1$ no $\mathbb{C}^2$, uma vez que $p(x + iy) = 0$ se e somente se o sistema (8) é verificado, Splenger (2014).

$$\begin{cases} x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 1 = 0 \\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

De acordo ainda com Spengler as soluções deste sistema podem ser associadas a uma cor específica, conforme a tabela 1:

TABELA 1. Associação de cores para as soluções de $p(z) = z^5 - 1$
Fonte: SPENGLER, 2014.

Solução	Cor
$(1, 0)$	vermelho
$\left(\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}), -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}\right)$	amarelo
$\left(\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}\right)$	verde
$\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}\right)$	azul claro
$\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}\right)$	azul escuro

Desta forma a visualização das bacias de atração de cada solução ficará clara. Como o sistema (8) está associado a um polinômio de grau 5 cada uma de suas soluções será associada a cinco cores diferentes, e no caso de não convergência será usada a cor preta. Ou seja, da malha inicial cada ponto irá, ou não, convergir para uma das cinco soluções do sistema. Utilizando o método de Newton e o algoritmo desenvolvido no software Matlab as bacias de atração das soluções do sistema (8) estão representadas na FIGURA 1.

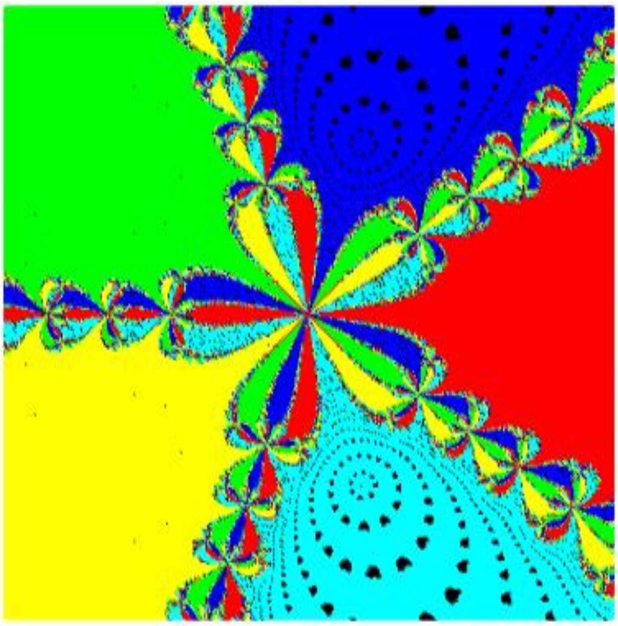

FIGURA 1. Bacias de atração das soluções do sistema (8)
Fonte: Elaboração dos autores.

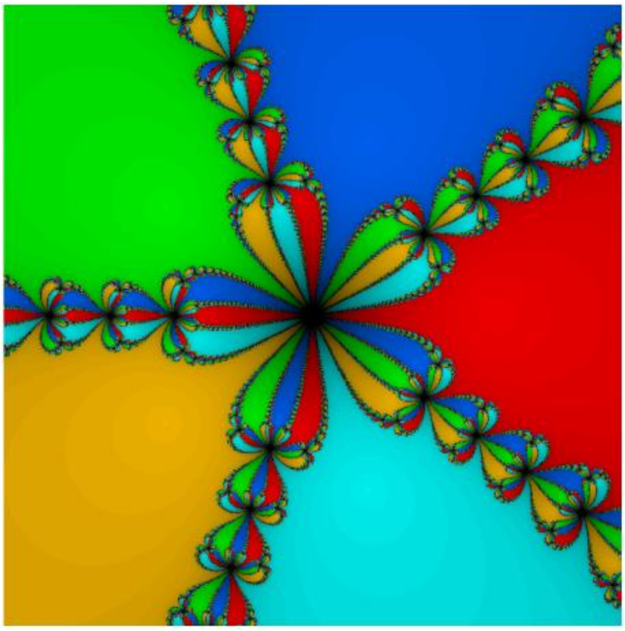

FIGURA 2. Bacias de atração das soluções do sistema (8)
Fonte: SPENGLER, 2014.

Em ambas as imagens foi considerado o intervalo a seguir: $-1{,}7 \leq x, y \leq 1{,}7$. Na imagem a esquerda foi utilizado um incremento de 0,01.

Ao aproximar o intervalo da FIGURA 2 para $-1{,}5 \leq x \leq -1$ e $0{,}25 \leq y \leq 0{,}5$ observando-se mais de perto é possível encontrar a propriedade de auto similaridade de fractais, que na verdade é “[...] a característica onde as partes possuem semelhança à figura inteira ou à uma parte maior” (SPENGLER, 2014, p.12).

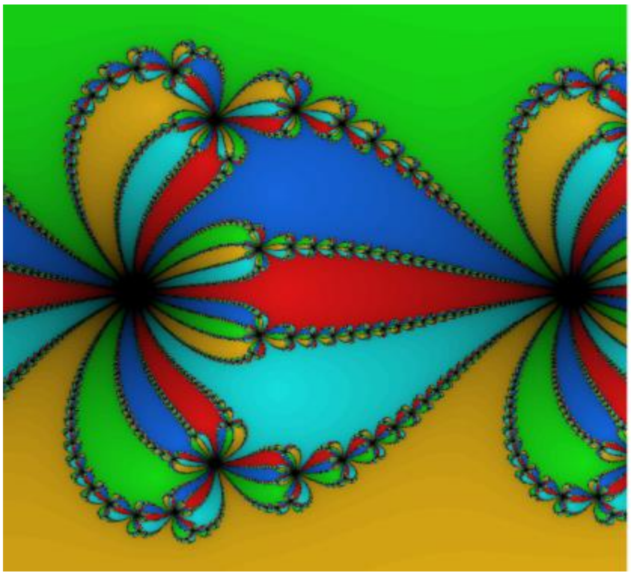

FIGURA 3. Zoom da Figura 2 nos intervalos $-1,5 \leq x \leq -1$ e $-0,25 \leq y \leq 0,25$
Fonte: SPENGLER, 2014.

Outro ponto interessante obtido como resultado da pesquisa é a variação do número de iterações necessárias para que cada aproximação inicial convirja para determinada solução, conforme pode ser observado na FIGURA 4.

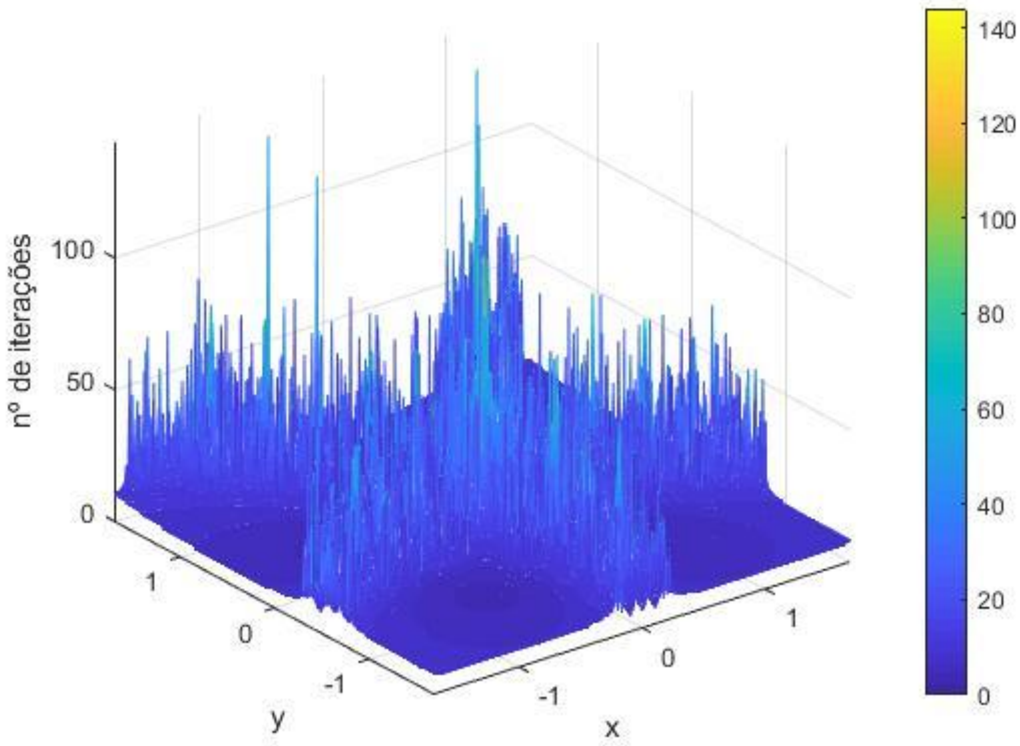

FIGURA 4. Gráfico do número iterações associadas à solução do sistema (8)
Fonte: Elaboração dos autores.

Destaca-se na FIGURA 4 a quantidade de iterações para cada uma das aproximações utilizadas no algoritmo. Pode-se observar que não se tem garantia de que se um ponto se encontra próximo de uma solução ele convergirá com um número menor de iterações que outro que esteja mais afastado.

CONCLUSÕES

Neste trabalho destaca-se a questão da convergência local do método numérico para resolução de sistemas de equações não lineares, ou seja, não se tem garantia de convergência quando a aproximação escolhida não faz parte da região de atração, em se tratando do número de iterações não se tem segurança, no caso de convergência, desse número ser baixo, quando a aproximação estiver dentro da bacia de atração, ou até mesmo alto caso esteja fora.

No aspecto computacional da implementação do método, evidencia-se uma grande capacidade de aperfeiçoamento e refinamento, otimizando assim o custo computacional do algoritmo, além de se considerar outros métodos e por meio disso analisar as diferenças de performance e custo computacional entre eles.

REFERÊNCIAS

BRASIL, R.M.I.R.F; BALTHAZAR, J.M.; GÓIS, W. **Métodos numéricos e computacionais na prática de engenharias e ciências.** São Paulo: Blucher, 2015.

BROYDEN, C. G. **A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. Mathematics of Computation,** v. 19, p. 577–593, 1965.

BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D.; BURDEN, A.M. **Análise numérica**. 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

CUNHA, M.C.C. **Métodos numéricos**. 2 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2000.

DENNIS, J. E.; MORE, J. J. **Quasi-newton methods, motivation and theory. SIAM Review**, v. 19, p. 46–89, 1977.

DENNIS, J. E.; SCHNABEL, R.B. **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equation**. SIAM Classics in Applied Mathematics, 16, 1996.

KOZAKEVICH, D.N. **Sistemas não lineares da Física e da Engenharia**. Tese de doutorado, Unicamp, Campinas, 1995.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia Científica**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004. 306p.

MARTINÉZ, J.M.; SANTOS, S.A. **Métodos computacionais de otimização**. IMPA, 20° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1995.

RUGGIERO, M.A.G. **Métodos Quase-Newton para resolução de sistemas não lineares esparsos e de grande porte**. Tese de doutorado, Unicamp, Campinas, 1990.

RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2 ed. São Paulo: Pearson, 1996.

SANTOS, L. T. **Sistemas não Lineares e Fractais**. Matemática Universitária, Rio de Janeiro, v. 1, n. 15, p. 102-116, dez. 1993.

SANTOS, T.M. **Um estudo sobre a resolução de sistemas não lineares: perspectivas teóricas e aplicações**. Tese de doutorado, Unicamp, Campinas, 2016.

SPENGLER, H. C. **SISTEMAS NÃO-LINEARES, MÉTODO DE NEWTON E FRACTAIS**. 2014. 40 f. Monografia (TCC) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014.