



VII Encontro de Iniciação Científica e  
Tecnológica  
VII EnICT  
ISSN: 2526-6772  
IFSP – Câmpus Araraquara  
20 e 21 de Outubro de 2022



## CONTROLE DO SISTEMA DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO MODELAGEM FUZZY TS

Victor Ildelfonso de Negreiros<sup>1</sup>, Leandro J. Elias<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP Campus Araraquara, [victor.negreiros@aluno.ifsp.edu.br](mailto:victor.negreiros@aluno.ifsp.edu.br)

<sup>2</sup> Professor EBTT, IFSP Campus Araraquara. [leandro.elias@ifsp.edu.br](mailto:leandro.elias@ifsp.edu.br)

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

**RESUMO:** Este trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica que tem como objetivo investigar a região de validade da representação fuzzy Takagi-Sugeno (TS) de sistemas não lineares. Como exemplo, o sistema de um pêndulo invertido é descrito com a modelagem fuzzy TS. O controle é realizado via realimentação de estados com uma função de Lyapunov quadrática. Simulações numéricas são realizadas para ilustrar os resultados a teoria investigada.

**PALAVRAS-CHAVE:** desigualdades matriciais lineares; função de Lyapunov quadrática; sistemas não lineares.

### INTRODUÇÃO

A modelagem fuzzy TS é uma importante ferramenta para análise e controle de sistemas não lineares (ELIAS et al., 2022a; ELIAS et al., 2022b; FARIA et al., 2022). Essa modelagem consiste em descrever uma classe de sistemas não lineares utilizando uma soma ponderada de sistemas lineares e é conhecida por método de não linearidades por setores (WANG; TANAKA, 2004). O método consegue descrever de forma exata a solução de um sistema não linear dentro de um conjunto compacto.

As ponderações utilizadas são denominadas funções de pertinência que satisfazem propriedades de convexidade. Assim, a análise de estabilidade de sistemas não lineares pode ser realizada via desigualdades matriciais lineares, do inglês “Linear Matrix Inequalities (LMIs)”, que podem ser resolvidas computacionalmente (BOYD et al., 1994). Em geral, a estabilidade é investigada via LMIs utilizando a teoria de Lyapunov (BOYCE; DIPRIMA, 2015; MONTEIRO, 2011; OLIVEIRA; AGUIAR; VARGAS, 2016).

Este trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica em execução. A modelagem fuzzy TS é realizada para o sistema de um pêndulo invertido e os resultados obtidos das simulações do sistema não linear com o sistema fuzzy TS, dentro de um conjunto compacto, são comparados. Além disso o controle do sistema fuzzy TS do pêndulo invertido é obtido com a utilização de uma função de Lyapunov quadrática. Simulações numéricas são realizadas para ilustrar os resultados da teoria investigada. Uma breve discussão dos resultados é realizada na conclusão.

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Considere uma classe de sistemas não lineares que podem ser descritos pela equação (BOYD et al., 1994; WANG; TANAKA, 2004):

$$\dot{x} = f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t))u(t) \quad (1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de variáveis premissa,  $u(t) \in \mathbb{R}^u$  é a entrada de controle,  $f_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $f_2 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times u}$  são funções suaves e não lineares. Utilizando o método de não

lineares por setores (WANG; TANAKA, 2004), a equação (1) pode ser descrito por um sistema fuzzy TS, para todo  $x(t) \in \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é um conjunto compacto, na seguinte forma:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

onde  $A_i, B_i$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas e  $r = 2^p$  é o número de modelos locais. As funções de pertinência  $h_i$  são obtidas por  $h_i = \prod_{j=1}^p w_k^j$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , onde  $w_0^j = (b - \phi_j(z))/(b - a)$ ,  $w_1^j = 1 - w_0^j$  e  $\phi_j(z) \in [a, b]$  são as não linearidades do sistema (BERNAL; GUERRA, 2010).

Devido a convexidade da equação (2), a estabilidade pode ser verificada apenas nos vértices do sistema utilizando a teoria de Lyapunov. O controle do sistema é realizado via realimentação de estados, ou seja, tomando  $u = Kx$ , obtém-se o sistema realimentado  $\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(A_i + B_i K)x(t)$ . Escolhendo uma função de Lyapunov candidata  $V(x) = x^t P x$ , com  $P = P^t$  definida positiva, a matriz de ganho do controlador  $K$  pode ser obtida via LMIs:

$$(A_i + B_i K)^t P + P(A_i + B_i K) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3)$$

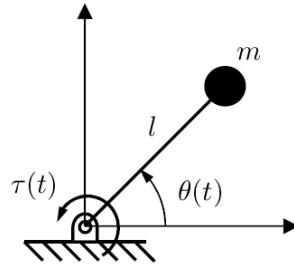
que podem ser resolvidas computacionalmente com o software *MATLAB* e com os pacotes *YALMIP* (LÖFBERG, 2004) e *MOSEK* (APS, 2019).

Como exemplo de aplicação da teoria investigada, considere o modelo de um pêndulo invertido de massa  $m$  e comprimento  $l$  como mostra a Figura 1. Um torque  $\tau(t)$  é aplicado no pêndulo com o objetivo de mantê-lo na posição vertical. A equação de movimento do pêndulo, considerando as forças que atuam no sistema, é definida por (CHEN, 1999; OGATA, 2010; ZILL, 2016):

$$ml^2 \ddot{\theta}(t) + mgl \cos(\theta(t)) = \tau(t) \quad (4)$$

em que  $g$  é a força gravitacional e  $\theta$  é o ângulo do pêndulo com o eixo horizontal.

**Figura 1:** Sistema do pêndulo invertido.



## METODOLOGIA

Defina o vetor de estados  $x = (x_1 \quad x_2)^t$ , onde  $x_1 := \theta$  e  $x_2 := \dot{\theta}$ . Assim, a equação (4) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\tau(t)}{ml^2} - \frac{mgl \cos(x_1)}{ml^2} \end{cases} \quad (5)$$

Tome a entrada de controle como o torque aplicado no pêndulo  $\tau(t) = u$  e o ponto de equilíbrio  $x_e = (\pi/2 \quad 0)^t$ , onde  $\tau_e = 0$ . Para deslocar o ponto de equilíbrio para a origem do sistema, defina as variáveis  $y_1 = x_1 - \pi/2$  e  $y_2 = x_2$ . Assim, a equação (5) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \quad (6)$$

onde  $\phi_1 := \cos(y_1 + \pi/2)/y_1$ . Tomando  $x_1 \in \mathcal{C} := [0, \pi]$ , a equação (6) pode ser descrito pela representação fuzzy TS do sistema, dado por (2), onde  $h_1 = w_0^1$  e  $h_2 = w_1^1$  são as funções de pertinência, com  $w_0^1 = (-0,64 - \phi_1)/(0,36)$  e  $w_1^1 = 1 - w_0^1$ , e as matrizes dos modelos locais são:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 65,5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 41,7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 222,2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

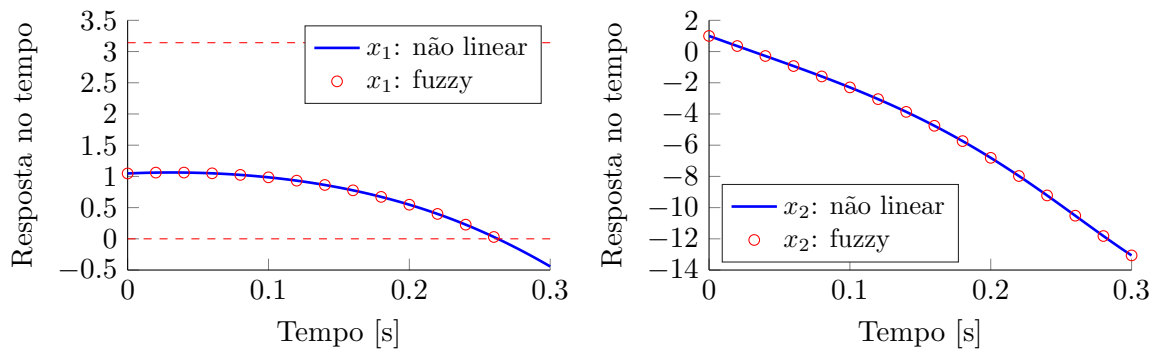
onde  $m = 0,20$  kg e  $l = 0,15$  m e  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. Para implementar as LMIS (3) e obter a matriz de ganho  $K$  que estabiliza o sistema é necessário realizar uma operação algébrica na expressão, pois o software não consegue resolver o produto das variáveis  $K$  e  $P$ , denominado BMI (do inglês, “Bilinear Matrix Inequalities”). Tomando  $M = P^{-1}$  e pré e pós multiplicando a expressão (3) por  $M$ , com algumas manipulações algébricas, obtém-se  $MA_i^t + Y^t B_i^t + A_i M + B_i Y < 0$  que é a LMI a ser programada. Ao obter  $M$  e  $Y$ , temos  $P = M^{-1}$  e  $K = Y M^{-1}$ . Neste exemplo, o ganho obtido foi  $K = (-0,5963 \quad -0,0235)$ .

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiro, a equação (5) e o sistema fuzzy TS do pêndulo com os modelos locais (7) e as funções de pertinência descritas na seção anterior foram simulados para  $u(t) = 0$  e  $x_0 = (1,0472 \quad 1)^t$ . A comparação entre os resultados são apresentadas na Figura 2. Verifica-se que o sistema evolui para além do conjunto  $\mathcal{C}$  aproximadamente em  $t = 0,27$  s. Isto ocorre porque o ponto equilíbrio tomado  $x_e$  é instável e ao tomar uma condição inicial  $x_0$  próximo a este ponto, a solução obtida se afasta rapidamente. Antes de  $t = 0,27$  s o sistema fuzzy TS consegue descrever de forma exata o sistema não linear.

A Figura 3 mostra a resposta no tempo das variáveis de estado do sistema fuzzy TS do pêndulo invertido controlado, ou seja, com  $u(t) = Kx$  e a matriz de ganhos do controlador  $K$  obtida na seção anterior. Verifica-se que o controle proposto consegue estabilizar o sistema em aproximadamente  $t = 3$  s.

**Figura 2:** Resposta no tempo do sistema do pêndulo invertido para  $u(t) = 0$ . As linhas tracejadas indicam a os limites da região  $\mathcal{C}$ .



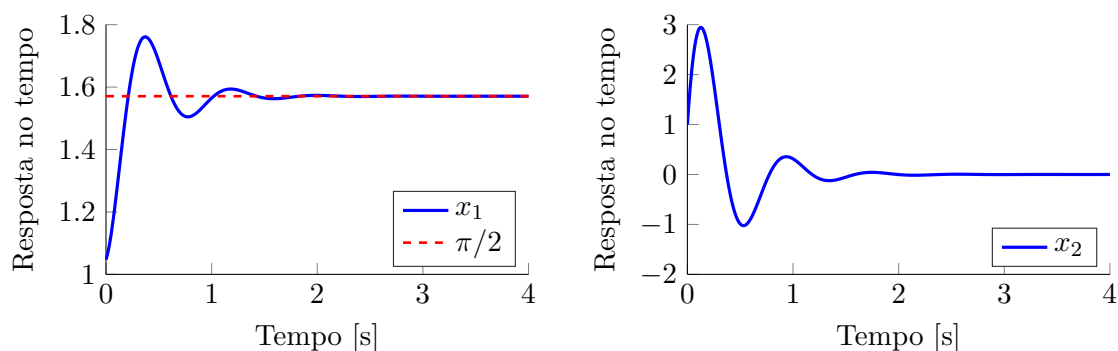
## CONCLUSÕES

Neste trabalho, o controle do sistema de um pêndulo invertido foi proposto utilizando a modelagem fuzzy TS. As simulações numéricas mostraram que o sistema fuzzy TS consegue representar de forma exata, dentro de um conjunto compacto, o sistema não linear e que o controle proposto foi capaz de estabilizar o sistema. Estudos futuros incluem investigar diferentes regiões de validade da representação dos sistema fuzzy TS.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos o IFSP pela bolsa PIBIFSP concedida para realização do projeto de pesquisa.

**Figura 3:** Resposta no tempo do sistema do pêndulo invertido controlado.



## REFERÊNCIAS

- APS, M. **The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.0.** Copenhagen, 2019. Disponível em: <http://docs.mosek.com/9.0/toolbox/index.html>. Acesso em: 14 set. 2022.
- BERNAL, M.; GUERRA, T. M. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi-Sugeno models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 18, n. 4, p. 815–822, 2010.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 10. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2015. 663 p.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory.** Philadelphia: SIAM, 1994.
- CHEN, C. T. **Linear system theory and design.** 3. ed. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p.
- ELIAS, L. J. et al. Robust static output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control for uncertain takagi-sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, p. 1–12, 2022.
- ELIAS, L. J. et al. Switched control design for nonlinear systems using state feedback. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2022.
- FARIA, F. A. et al. Less conservative state feedback design with switched controllers for ts fuzzy systems. In: SPRINGER. **APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing.** [S.l.], 2022. p. 251–261.
- LÖFBERG, J. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design.** Taipei, China: [s.n.], 2004. p. 284–289.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos.** 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2011. 670 p.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2010. 809 p.
- OLIVEIRA, V. A.; AGUIAR, M. L.; VARGAS, J. B. **Engenharia de controle fundamentos e aulas de laboratório.** Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2016. 307 p.
- WANG, H. O.; TANAKA, K. **Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach.** New York: John Wiley & Sons, 2004.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** 3. ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016. 437 p.