



VIII Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica

VIII ENICT

ISSN: 2526-6772

IFSP – Câmpus Araraquara

19 e 20 de outubro de 2023



O sistema neuronal: Simulação expoentes de Lyapunov GABRIEL DE MORAIS CORDEIRO¹, FÁBIO ROBERTO CHAVARETTE²

¹ Graduando em Engenharia Mecânica, IFSP-ARQ, cordeiro.gabriel@aluno.ifsp.edu.br

² Doutor em Engenharia Mecânica, fabio.chavarette@unesp.br, UNESP- IQ

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Dinâmica dos Corpos Rígidos, Elásticos e Plásticos 3.05.03.02-7

RESUMO: Podem-se encontrar as evidências de dinâmica caótica através da estabilidade do sistema, por meio dos expoentes de Lyapunov, tal comportamento do caos é biologicamente relacionado a um indivíduo sujeito a crise epilética ou convulsiva. Aplicando-se essa teoria neste trabalho, o modelo que representa os comportamentos observados em neurônios biológicos é teorizado através do sistema neuronal de Hindmarsh-Rose. Portanto, esse trabalho contribui como uma alternativa para desenvolver-se outras vertentes tecnológicas aplicadas à profilaxia e tratamento de ataques epiléticos, visto que os resultados mostram um controle desse comportamento. Logo, Entende-se por caos a existência de comportamento irregular, ou aperiódico e com dependência sensível das condições iniciais. Esta sensibilidade significa que duas soluções geradas por condições iniciais ligeiramente diferentes divergem exponencialmente com o tempo.

PALAVRAS-CHAVE: caos; dinâmica; não linear; modelos; estabilidade

INTRODUÇÃO

Todas as atividades físicas conscientes e inconscientes são controladas pelo sistema nervoso, ele é formado por bilhões de células nervosas tendo como principal delas o neurônio, que captam informações vindas do interior e exterior do corpo humano. As células nervosas juntamente com as musculares, têm duas propriedades fisiológicas características que são a excitabilidade e a condutibilidade, ou seja, capacidade de reagir a um dado estímulo e transmitir esse estímulo sob a forma de impulsos eletroquímicos ao longo de suas membranas. A membrana das células nervosas detém propriedades elétricas que são dadas através do arranjo molecular de seus componentes. Essas propriedades estabelecem a sequência de alterações de voltagem produzidas pelo fluxo de corrente através das membranas e sensibilizam a capacidade de células, eletricamente excitáveis, na condução das informações. Por este fato, a membrana do neurônio é capaz de ser comparada a um circuito elétrico que abrange várias unidades repetidas [1].

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Define-se sistema como um conjunto de elementos que, de alguma maneira, se relacionam entre si e que dependam de parâmetros. Classifica-se sistemas dinâmicos como um sistema na qual seus elementos variáveis variam com o tempo, seja ele contínuo ou discreto, dessa maneira, um sistema dinâmico apresenta um estado em cada instante de tempo. Pode-se, então, exemplificar alguns sistemas dinâmicos observáveis no cotidiano como, o clima na qual seus estados dependem das condições atmosféricas (força dos ventos, umidade, temperatura do ar, etc.), o preparado de um bolo no forno no qual o estado do bolo depende da temperatura do forno, uma viagem de carro cujos estados dependem das condições da estrada e de vários outros fatores. Como a taxa de variação de uma grandeza sobre o tempo pode ser descrita por uma derivada, um Sistema Dinâmico, em geral, pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias quase

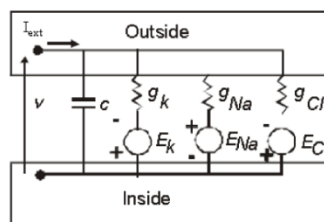
sempre complicadas de se resolver analiticamente (SAVI, 2017). O espectro dos expoentes de *Lyapunov* expõe uma percepção global da dinâmica do sistema. Um sistema de dimensão 3 possui três expoentes de *Lyapunov*. Para determinar se um sistema é caótico, é suficiente conhecer somente o maior dos expoentes de *Lyapunov* pois, desse modo, é possível saber se trajetórias vizinhas convergem. Se divergirem, o maior expoente de *Lyapunov* é positivo (SAVI, 2017; KORSCH; JODL, 2013). É uma ocorrência expressiva que tal afastamento ocorra a uma taxa exponencial à qual se refere como *expoente de Lyapunov* da órbita, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso λ seja positivo, tem-se a evidência de comportamento caótico. Em cenários onde há mais de um expoente de *Lyapunov* positivo convencionam-se qualificar *hipercaos*. Órbitas periódicas e pontos fixos, ainda que instáveis, sempre estão associados a λ negativo, ou seja, órbitas periódicas convergem exponencialmente com o passar do tempo (SAVI, 2017; VIANA, 2011). Entende-se por *caos* a existência de comportamento irregular, ou aperiódico e com dependência sensível das condições iniciais. Esta sensibilidade significa que duas soluções geradas por condições iniciais ligeiramente diferentes divergem exponencialmente com o tempo. Quando um sistema dinâmico apresenta caos, surgem problemas quanto à previsibilidade do comportamento futuro uma vez que, a diferença entre duas condições iniciais “ligeiramente distintas” pode estar dentro do intervalo de incerteza em que estas condições iniciais são conhecidas. Diante disso, não é factível dizer, com segurança, de qual das duas condições iniciais está se falando.

METODOLOGIA

As fórmulas desta descrição têm sido usadas desde então como a base para quase todos os outros modelos de tecidos excitáveis que envolvem correntes iônicas [3].

O modelo desenvolvido, ilustrado na figura 1, basicamente estabelece que o fluxo de corrente total através da membrana é o resultado de contribuições individuais de três diferentes correntes iônicas: (1) corrente de potássio, (2) corrente de sódio e (3) e uma corrente iônica de vazamento que é dada pelo fluxo de outros íons como íons cloreto e bicarbonato. Essa corrente de membrana depende da capacitância da membrana plasmática e da resistência dos canais iônicos. Um circuito básico para a membrana pode ser visto na figura 1.

FIGURA 1. Modelo elétrico da membrana



Fonte: Próprio autor

Esse circuito é apropriado para sistemas simples de membrana como o do axônio gigante da lula ou outras membranas axonais, onde apenas um ou dois canais iônicos voltagem-dependentes são vistos. No modelo há um capacitor C , para representar a capacitância da membrana, uma condutância de sódio g_{Na} , condutância de potássio g_K , e uma condutância de vazamento g_{Cl} . O potencial de membrana V é o potencial no interior da célula menos o potencial do exterior da célula, e pode haver uma corrente I_{ext} injetada no interior da célula por um eletrodo ou vinda de outras partes da célula. De acordo com as convenções usuais, as correntes são positivas no sentido externo. A geração de *burstings* neuronais tem sido extensivamente estudada no contexto do modelo neuronal de Hindmarsh-Rose, o qual estabelece uma variável de estado adimensional para o potencial de membrana ($x(t)$) e outras duas (também adimensionais) associadas aos fluxos iônicos rápidos ($y(t)$) e lentos ($z(t)$). Essas variáveis se relacionam de forma não linear na composição do potencial de membrana, o que pode ser traduzido pela seguinte dinâmica [7]:

$$x'_1 = y'_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I \quad (1)$$

$$y'_1 = c - dx_1^2 - y_1 \quad (2)$$

$$z'_1 = r[s(x_1 - x_r) - z_1] \quad (3)$$

onde a, b, c, d, s, r, x_r e I são parâmetros do sistema, que, dependendo dos valores adotados, permitem simular um vasto conjunto de comportamentos dinâmicos topologicamente equivalentes aos observados no âmbito experimental. Isso faz do modelo HR um dos mais emblemáticos no estudo qualitativo do fenômeno de bursting neuronal [14]. O sistema apresenta vários comportamentos, um típico comportamento caótico do potencial de membrana - i.e. aperiódico e com sensibilidade em relação às condições iniciais

TABELA 1. – Valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas [14].

Parâmetros	Valores
a	1
b	3
c	1
d	5
r	0,006
s	4
x_r	-1,56
I	variável

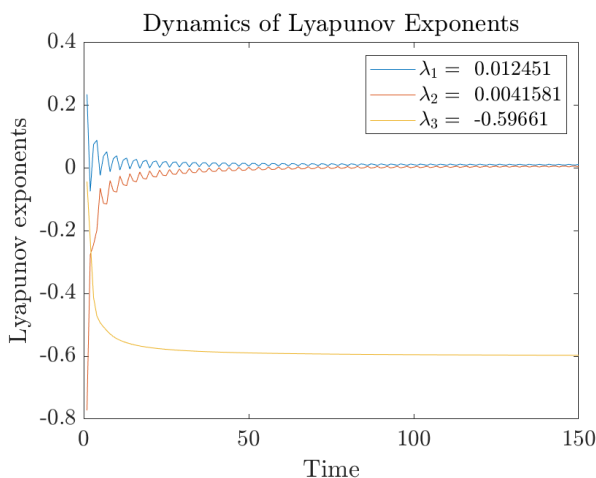
Tal comportamento pode ser facilmente modulado tomando a estimulação externa (variável I) como um parâmetro de controle.

A motivação na escolha do modelo Hindmarsh e Rose está estabelecida pelo fato dele conseguir representar vários comportamentos dinâmicos, que dependem de parâmetros biofísicos, observados em neurônios reais como, por exemplo: quiescência quando a estimulação da entrada para o neurônio está abaixo de um determinado limite fazendo com que a saída atinja um regime estacionário; *spiking* quando a saída é constituída por uma série igualmente espaçados; *bursting* quando a saída é constituída por grupos de dois ou mais picos separados por períodos de inatividade. Outra motivação, senão a mais importante, é o fato do modelo também reproduzir comportamento caótico, mais ainda hiper-caótico [12], na qual este comportamento reproduz no individuo humano a manifestação de crise epilética e/ou convulsiva [17].

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesse sentido, pode-se inferir que o caos é verificado pelo pico do espectro de frequência, sendo acima de 3 picos, como encontrado na Figura 3, com I sendo 2 ou 3, tem-se então que o comportamento do sistema para $I = 2, 8$ é um comportamento instável e caótico, mais ainda, hiper-caótico. Os expoentes de Lyapunov foram calculados e encontrados $\lambda \approx 0,012$, $\lambda \approx 0,004$ e $\lambda \approx -0,596$. Estes expoentes indicam se uma órbita é sensível ou não às condições iniciais, por meio dos expoentes positivos verifica-se se o sistema é realmente caótico.

FIGURA 2. Esquema computacional da visão estéreo.



Fonte: Próprio autor

TABELA 2. – Evolução dos Expoentes de *Lyapunov* no tempo em segundos.

Tempo	1	10	20	30	40
Expoentes de <i>Lyapunov</i>	$\lambda_1=0,23513$ $\lambda_2=-0,7728$	$\lambda_1=0,039768$ $\lambda_2=-0,07618$	$\lambda_1=0,00073675$ $\lambda_2=0,008803$	$\lambda_1=0,017582$ $\lambda_2=-0,016158$	$\lambda_1=0,016576$ $\lambda_2=-0,010406$
Tempo	100	200	300	400	500
Expoentes de <i>Lyapunov</i>	$\lambda_1=0,011564$ $\lambda_2=0,003147$	$\lambda_1=0,010776$ $\lambda_2=0,0067823$	$\lambda_1=0,010801$ $\lambda_2=0,0077065$	$\lambda_1=0,010367$ $\lambda_2=0,0086149$	$\lambda_1=0,010639$ $\lambda_2=0,0086279$

Fonte: Próprio autor.

Foram inicialmente observados os comportamentos dinâmicos que o modelo HR apresenta. Constatou-se que, conforme a estimulação externa *I* aumenta, o sistema começa a oscilar e vai perdendo estabilidade caminhando para visível aleatoriedade e imprevisibilidade. Logo, através do cálculo dos expoentes de *Lyapunov* foi confirmada a presença de comportamento caótico, na qual este comportamento faz relação a um indivíduo sobre ataque epilético e/ou convulsivo. Desperta-se então o interesse no controle do sistema, na qual em tradução direta ao análogo biológico significa a inibição das crises epiléticas.

CONCLUSÕES

Para investigar se um sistema exibe comportamento caótico basta analisar seu comportamento frente a pequenas variações nas condições iniciais. Isto posto, se as soluções se afastam exponencialmente no tempo, então o sistema admite sensibilidade às condições iniciais. A vantagem de estudar o comportamento caótico é que, sob condições estabelecidas, é possível conservar, evitar, estabilizar. Dessa forma, importante, é o fato do modelo também reproduzir comportamento caótico, mais ainda hiper caótico, na qual este comportamento reproduz no indivíduo humano a manifestação de crise epilética e/ou convulsiva, visto que o sistema apresenta dois expoentes de *Lyapunov* positivos, comprovando ser hiper caótico.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Laboratório SISPLEXOS, onde fora desenvolvido o projeto, bem como à UNESP pelo suporte técnico e acadêmico. Os autores também agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Processo N° 2022/13867-1 pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] Butera, R, Rinzel J, Smith J.; Models of respiratory rhythm generation in the pre-Botzinger Complex. I. Bursting Pacemaker Neurons. *Journal of Neurophysiology*; v. 82, 1999.
- [2] Chavarette, F.R. Optimal Linear Control to Parametric Uncertainties. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2013
- [3] Didier, J., Faverjon, B., Sinou, J.J., Analyzing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion. *Journal of Vibration and Control*, 2012.
- [4] Fiedler-Ferrara, N., Prado, C.P.C., *Caos: Uma Introdução*. São Paulo: Edgar Blücher, 1995.
- [5] Ghanem, R.G., Spanos, P.D., *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Courier Dover Publications, 1991.
- [6] Hodgkin, A. L., Huxley, A. F.; A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J Physiol*. 1952
- [7] Hindmarsh, J. L., Rose, R. M.; A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society B*, 1984.
- [8] Kepecs, A, Lisman, J.; Information encoding and computation with spikes and bursts. *Network: Computation in Neural Systems*, 2003.
- [9] Koch, C.; *Biophysics of Computation: Information Processing in Single Neurons*. Oxford University Press; 2004.