



VIII Encontro de Iniciação Científica e  
Tecnológica  
VIII EnICT  
ISSN: 2526-6772  
IFSP – *Campus* Araraquara  
19 e 20 de outubro de 2023



## Análise do modelo de um pêndulo invertido de base móvel utilizando representação fuzzy TS

GUILHERME HENRIQUE SACRAMONI NOGUEIRA<sup>1</sup>, LEANDRO JOSÉ ELIAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Bacharelado em Engenharia Mecânica, IFSP *Campus* Araraquara, [g.sacramoni@aluno.ifsp.edu.br](mailto:g.sacramoni@aluno.ifsp.edu.br).

<sup>2</sup> Doutor, IFSP *Campus* Araraquara, [leandro.elias@ifsp.edu.br](mailto:leandro.elias@ifsp.edu.br).

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

**RESUMO:** O presente trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica que tem como objetivo investigar a controlabilidade de um sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TS) de um pêndulo invertido. É realizado o controle do sistema utilizando uma função de Lyapunov quadrática em uma formulação de desigualdades matriciais lineares (do inglês “Linear Matrix Inequalities” ou, simplesmente, LMIs). Para ilustrar os resultados obtidos, são utilizadas simulações numéricas em MATLAB.

**PALAVRAS-CHAVE:** Desigualdades Matriciais Lineares; Equações Diferenciais Ordinárias; Sistemas Não Lineares.

### INTRODUÇÃO

Tratando-se da análise de controle e estabilidade de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, o pêndulo invertido é um dos mais emblemáticos devido à aplicação em diversas áreas da tecnologia. Como exemplo, destacam-se braços robóticos que precisam equilibrar objetos e, até mesmo, construções de larga escala que são projetados tendo em mente o comportamento do pêndulo invertido (KAFETZIS; MOYSIS, 2017). Devido à não linearidade do modelo, busca-se uma representação aproximada através de um sistema obtido por linearização ao redor de um ponto de equilíbrio hiperbólico, próximo do qual as características de estabilidade são preservadas (MONTEIRO, 2011). Este método é, porém, limitado às regiões muito próximas do ponto de interesse e uma alternativa é utilizar a modelagem fuzzy TS, que pode obter uma representação aproximada ou exata do sistema (ABDULLAH et al., 2021; MD; AGARWAL, 2023). No presente trabalho, busca-se aplicar a modelagem fuzzy TS, com o método de não linearidade por setores, em um modelo de um pêndulo invertido em uma base móvel (WANG; TANAKA, 2004) para obter o controle do sistema. As análises e o controle são realizadas via simulação do sistema em software.

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Seja uma classe de sistemas não lineares que podem ser descritos pela equação (BOYD et al., 1994):

$$\dot{x} = f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t))u(t) \quad (1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de variáveis premissa,  $u(t) \in \mathbb{R}^u$  é a entrada de controle,  $f_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $f_2 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times u}$  são funções suaves e não lineares. Utilizando o método de não lineares por setores (WANG; TANAKA, 2004), para  $z(t)$  definida em um conjunto compacto, a equação (1) pode ser descrita por um sistema fuzzy TS na seguinte forma:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

na qual  $A_i, B_i$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas e  $r = 2^p$  é o número de modelos locais. As funções de pertinência são definidas por  $h_i = \prod_{j=1}^p w_{k_{ij}}^j$ ,  $k_{ij} \in \{0, 1\}$  obtido tal como em (ELIAS et al., 2022a; ELIAS et al., 2022b),  $w_0^j = (b - \varphi_j(z))/(b - a)$ ,  $w_1^j = 1 - w_0^j$  e  $\varphi_j(z) \in [a, b]$  são as não linearidades do sistema.

Devido à convexidade da equação (2), a estabilidade pode ser verificada apenas nos vértices do sistema fuzzy TS utilizando a teoria de Lyapunov. O controle do sistema é realizado via realimentação de estados com  $u = \sum_{i=1}^r h_i K_i x$ . Assim, o sistema realimentado é obtido tal que  $\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i (A_i + B_i K_i) x(t)$ . Escolhendo uma função de Lyapunov candidata quadrática  $V(x) = x^t P x$ , com  $P$  simétrica e definida positiva, as matrizes de ganho do controlador  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  podem ser obtidas via LMIs:

$$(A_i + B_i K_i)^t P + P(A_i + B_i K_i) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3)$$

que podem ser resolvidas computacionalmente com o software MATLAB e com os pacotes YALMIP (LÖFBERG, 2004) e MOSEK (APS, 2019).

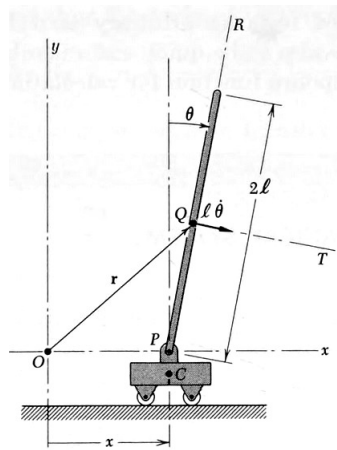
## METODOLOGIA

Em Cannon (2003) é apresentado a modelagem para um pêndulo invertido como mostra a Figura 1. As equações de movimento são:

$$\begin{aligned} m_c \ddot{x} + m \ddot{x} + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta &= f \\ J \ddot{\theta} + ml(\ddot{x} \cos \theta + l \ddot{\theta}) - mgl \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

no qual  $x$  e  $m_c$  são, respectivamente, o deslocamento horizontal e a massa da plataforma móvel. Já  $m, 2l$  e  $\theta$  são, respectivamente, a massa, o comprimento e o ângulo de inclinação da haste. Por fim,  $J$  é o momento de inércia,  $g$  é a aceleração gravitacional, e  $f$  é a força externa a ser considerada.

**Figura 1:** Pêndulo invertido sobre base móvel



Fonte: Cannon (2003).

Tomando  $M = m_c + m$ ,  $J = \frac{ml^2}{3}$  e  $a = 1/M$  em (4), com algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta - aml \dot{\theta}^2 \sin 2\theta/2 - af \cos \theta}{4l/3 - aml \cos^2 \theta} \quad (5)$$

Defina as novas variáveis de estado  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ . Defina ainda a entrada de controle  $u(t) = f$ . Assim a

equação espaço de estado é obtida:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \operatorname{sen}(x_1) - amlx_2^2 \operatorname{sen}(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u(t)}{\Theta(x_1)}, \quad \Theta(x_1) = \frac{4l}{3} - aml \cos^2(x_1) \end{aligned} \quad (6)$$

Verifica-se que o ponto de equilíbrio é a origem. Considere os estados do sistema  $x_1 \in [-1, 5, 1, 5]$  e  $x_2 \in [-2, 2]$  como sendo as variáveis premissa. Defina as funções:

$$\varphi_1 = \frac{\operatorname{sen}(x_1)}{x_1 \Theta}, \quad \varphi_2 = \frac{x_2 \operatorname{sen}(2x_1)}{2\Theta}, \quad \varphi_3 = \frac{\cos(x_1)}{\Theta}. \quad (7)$$

As funções de pertinência são:

$$\begin{aligned} h_1 &= w_1^1 w_1^2 w_1^3, & h_2 &= w_1^1 w_1^2 w_0^3, & h_3 &= w_1^1 w_0^2 w_1^3, & h_4 &= w_1^1 w_0^2 w_0^3 \\ h_5 &= w_0^1 w_1^2 w_1^3, & h_6 &= w_0^1 w_1^2 w_0^3, & h_7 &= w_0^1 w_0^2 w_1^3, & h_8 &= w_0^1 w_0^2 w_0^3 \\ w_0^1 &= \frac{(1,7647 - \varphi_1)}{0,7885} & w_0^2 &= \frac{(1,2359 - \varphi_2)}{1,7182} & w_0^3 &= \frac{(1,7647 - \varphi_3)}{1,7123} & w_1^j &= 1 - w_0^j, \forall j. \end{aligned} \quad (8)$$

Considere ainda  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $M = 8 \text{ kg}$  e  $l = 0.5 \text{ m}$ . Desse modo, a representação fuzzy TS (2) do sistema (6) é obtida, com as seguintes matrizes dos modelos locais:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17,2941 & -0,1236 \end{bmatrix}, & A_3 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17,2941 & 0,0482 \end{bmatrix} \\ A_5 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9,5669 & -0,1236 \end{bmatrix}, & A_7 = A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9,5669 & 0,0482 \end{bmatrix} \\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1765 \end{bmatrix}, & B_2 = B_4 = B_6 = B_8 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0052 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizando o software MATLAB e os pacotes YALMIP (LÖFBERG, 2004) e MOSEK (APS, 2019), conforme procedimento apresentado em Negreiros e Elias (2022), foram obtidas as matrizes do ganho do controlador:

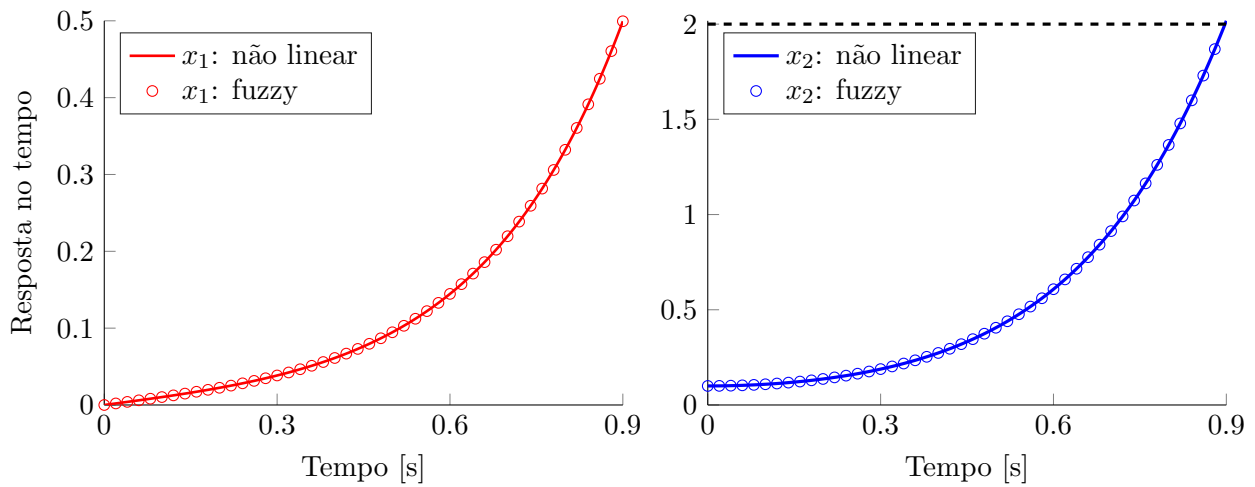
$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 105,7208 & 4,6080 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} 3563,2 & 0,1553 \end{bmatrix}, & K_3 &= \begin{bmatrix} 105,7208 & 5,5816 \end{bmatrix} \\ K_4 &= \begin{bmatrix} 3563,2 & 0,1881 \end{bmatrix}, & K_5 &= \begin{bmatrix} 61,9333 & 4,6080 \end{bmatrix}, & K_6 &= \begin{bmatrix} 2087,4 & 0,1553 \end{bmatrix} \\ K_7 &= \begin{bmatrix} 61,9333 & 5,5816 \end{bmatrix}, & K_8 &= \begin{bmatrix} 2087,4 & 0,1881 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

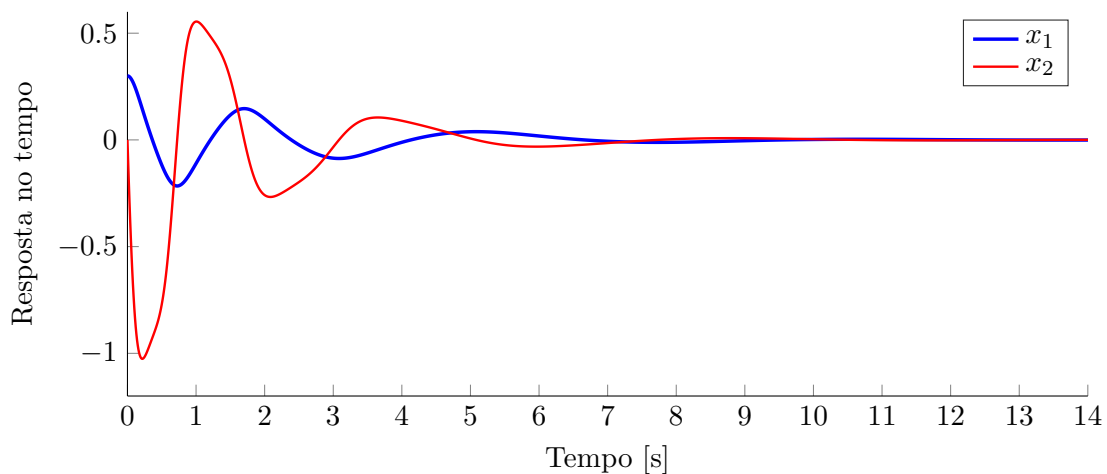
O sistema fuzzy TS do pêndulo invertido com os modelos locais (9) e as funções de pertinência descritas na seção anterior foram simulados para  $u(t) = 0$  e  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix}^t$ . A Figura 2 mostra a comparação do sistema fuzzy com o sistema não linear. O sistema fuzzy TS consegue descrever de forma exata o sistema não linear dentro da região de validade.

A Figura 3 mostra a resposta no tempo do sistema fuzzy TS do pêndulo invertido para  $u(t) = \sum_{i=1}^8 h_i K_i x$ , sendo as matrizes de ganhos do controlador dadas em (10). O controle proposto consegue estabilizar o sistema em aproximadamente  $t = 10 \text{ s}$ .

**Figura 2:** Resposta no tempo do sistema do pêndulo invertido para  $u(t) = 0$ . A linha tracejada indica o limite da região fuzzy.



**Figura 3:** Resposta no tempo do sistema do pêndulo invertido controlado.



## CONCLUSÕES

No presente trabalho, foram realizadas a modelagem fuzzy TS de um pêndulo invertido com base móvel e o controle do sistema. Simulações numéricas mostraram que o sistema fuzzy TS consegue representar de forma exata o sistema não linear, dentro da região de validade. Além disso, a formulação da função de Lyapunov via LMIs permitiu encontrar o ganho do controlador que estabiliza o sistema no ponto de equilíbrio. Estudos futuros incluem investigar a controlabilidade do sistema fuzzy TS do pêndulo invertido.

## REFERÊNCIAS

- ABDULLAH, M. et al. Swing up and stabilization control of rotary inverted pendulum based on energy balance, fuzzy logic, and lqr controllers. **Measurement and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 54, n. 9-10, p. 1356–1370, 2021.
- APS, M. Mosek optimization toolbox for matlab. **User's Guide and Reference Manual, Version**, MOSEK, v. 4, p. 1, 2019.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.
- CANNON, R. H. **Dynamics of physical systems**. Washington, D.C.: Courier Corporation, 2003.
- ELIAS, L. J. et al. Robust static output feedback  $H_\infty$  control for uncertain takagi-sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, p. 1–12, 2022.
- ELIAS, L. J. et al. Switched control design for nonlinear systems using state feedback. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2022.
- KAFETZIS, I.; MOYSIS, L. Inverted pendulum: A system with innumerable applications. **School of Mathematical Sciences**, Aristotle University of Thessaloniki, 2017.
- LÖFBERG, J. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. **2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design**. Taipei, China, 2004. p. 284–289.
- MD, S.; AGARWAL, R. Stabilization and control of inverted pendulum cart system using fuzzy logic controller. In: IEEE. **2023 3rd International Conference on Intelligent Technologies (CONIT)**. Hubli, India, 2023. p. 1–5.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2011. 670 p.
- NEGREIROS, V. I. de; ELIAS, L. J. Controle do sistema de um pêndulo invertido utilizando modelagem fuzzy ts. In: IFSP. **VII Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica-EnICT (ISSN: 2526-6772)**. Araraquara, 2022.
- WANG, H. O.; TANAKA, K. **Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach**. Tóquio, Japão: John Wiley & Sons, 2004.