



IX Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
IX EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Campus Araraquara
6 de dezembro de 2025



Análise e controle de um sistema de suspensão de assento de veículos.

Letícia Paola Wetterich Correa¹, Leandro José Elias²

¹ Graduanda em Bacharelado em Engenharia Mecânica, IFSP, *Campus* Araraquara, l.paola@aluno.ifsp.edu.br

² Doutor em Engenharia Elétrica, IFSP, *Campus* Araraquara, leandro.elias@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

RESUMO: Este trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica que tem como objetivo realizar a análise e controle de sistemas dinâmicos via funções de Lyapunov. Nesse estudo é realizada a análise e controle de um sistema de suspensão de assento de veículos, cujo modelo possui uma dinâmica de equações diferenciais lineares com um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. O controle é aplicado no conjunto mola amortecedor e é justificado pela redução na oscilação do sistema, resultando em um maior conforto para o usuário. Simulações numéricas em MATLAB são realizadas para ilustrar os resultados obtidos.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas Lineares; Funções de Lyapunov; Desigualdades Matriciais Lineares.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica que propõe a análise e controle de sistemas dinâmicos mediante teoria de Lyapunov. Em geral, a teoria de Lyapunov é utilizada para investigar sistemas não lineares, mas também pode ser utilizada para investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear (ou linearizado) via equação matricial (Kelley e Peterson, 2010; Monteiro, 2006). Segundo Boyd (1994), a teoria de Lyapunov pode ser verificada mediante resolução de desigualdades matriciais lineares ou LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), cujas inequações podem ser resolvidas em software, como o MATLAB, a partir de pacotes computacionais YALMIP (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999). O controle proposto para o sistema é realizado via realimentação de estados (Dorf e Bishop, 2009; Nise, 2017), cuja matriz de ganhos do controlador é obtida via LMIs.

O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria de Lyapunov, com o uso de LMIs, para analisar e implementar ações de controle em um sistema de suspensão de assento de veículos. Em Kluever (2016) é apresentado um modelo para o sistema de suspensão de assento e, as entradas de controle, são inseridas neste modelo, tal como em Elias et. al. (2021). Desse modo, é obtido o modelo linear para o sistema de suspensão de assento investigado neste estudo.

O trabalho está organizado com a apresentação de breve introdução. Na seção de fundamentação teórica são apresentados o modelo e demais teorias da literatura. Em metodologia, os conceitos teóricos são aplicados no modelo investigado. As simulações e decorrentes análises são apresentadas na seção de resultados e discussões, seguidos por uma breve conclusão.

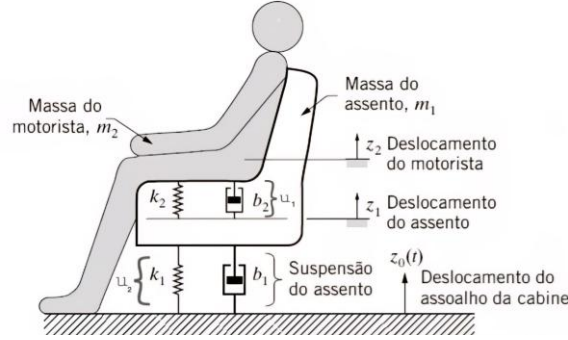
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O sistema físico analisado neste trabalho é um modelo de suspensão de um assento de veículo apresentado na Figura 1. Um modelo apresentado por Kluever (2016) é composto por dois graus de liberdade, representando a massa do assento m_1 e a massa do motorista m_2 , conectadas por molas k_1 e k_2 e amortecedores

de coeficientes b_1 e b_2 . Duas entradas de controle u_1 e u_2 são inseridas no sistema (Elias et. al., 2021). As equações de movimento obtidas são

$$\begin{cases} m_1 z''_1 + b_1 z'_1 + b_2(z'_1 - z'_2) + k_1 z_1 + k_2(z_1 - z_2) = u_1 - u_2 \\ m_2 z''_2(z'_2 - z'_1) + k_2(z_2 - z_1) = u_2 \end{cases} \quad (1)$$

Figura 1: Sistema de suspensão de assento.



Fonte: Autoria própria.

Neste trabalho, z_0 é um vetor deslocamento inicial, ou seja, uma condição inicial do sistema. As equações de movimento podem ser descritas por $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, A e B são as matrizes reais de dimensão apropriada. A estabilidade do sistema sem ação de controle, quando $u = 0$, pode ser investigada pela análise dos autovalores da matriz associada ao sistema A (Boyce e Dippima, 2015; Kelley e Peterson, 2010), assim como pela LMI $A^T P + PA < 0$, sendo P uma matriz simétrica definida positiva (Monteiro, 2011).

O controle é realizado via realimentação de estados tomando $u(t) = -Kx(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Dorf e Bishop, 2009; Nise, 2017; Ogata, 2010). O sistema em malha fechada fica $x'(t) = (A - BK)x(t)$. O método indireto de Lyapunov, garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada se existir uma matriz simétrica definida positiva P que satisfaça $(A - BK)^T P + P(A - BK) < 0$. Assim como em Negreiros e Elias, (2023), é definido $M = P^{-1}$ e $Y = KM$, obtendo a inequação $(AM - BY)^T + AM - BY < 0$ (Boyd et al., 1994), que é linear nas variáveis M e Y . Resolvendo esta última LMI, obtém-se a matriz de ganhos do controlador $K = YM^{-1}$.

METODOLOGIA

O comportamento dinâmico do sistema é descrito pela equação de estado $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, que é obtido ao definir as novas variáveis de estado $x_1 = z_1$, $x_2 = z'_1$, $x_3 = z_2$ e $x_4 = z'_2$. Assim, a matriz A e B são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{(b_1+b_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_2} & -\frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1} \end{bmatrix}, x(0) = z_0 = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z'_1(0) \\ z_2(0) \\ z'_2(0) \end{bmatrix} \quad (2)$$

TABELA 1. Valores dos Parâmetros do sistema

Parâmetro	m_1	m_2	k_1	k_2	b_2	b_1
Valor	150 kg	80 kg	4000 N/m	3000 N/m	700 s^{-1}	500 s^{-1}

Fonte: Autoria própria.

As análises e simulações do sistema (2) foram realizadas para os valores de parâmetros definidos na Tabela 1. Quando $u = 0$, os autovalores obtidos são $\lambda_1 = -7,3 + 3,8i$, $\lambda_2 = -7,3 - 3,8i$, $\lambda_3 = -1 + 3,7i$, $\lambda_4 = -1 - 3,7i$. Como todos possuem parte real negativa, o sistema é assintoticamente estável, condição também verificada pela LMI $A^T P + P A < 0$, P apresentada em (3)

$$P = \begin{bmatrix} 0,12 & -0,29 & 0,04 & 0,07 \\ -0,29 & 2,16 & 0,09 & 0,19 \\ 0,04 & 0,09 & 0,21 & -0,37 \\ 0,07 & 0,19 & -0,37 & 2,15 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ao considerar a ação de controle no sistema, a LMI $(AM - BY)^T + AM - BY < 0$ foi resolvida no MATLAB, com os pacotes YALMIP e SeDuMi, obtendo a matriz $K = YM^{-1}$, apresentada em (4).

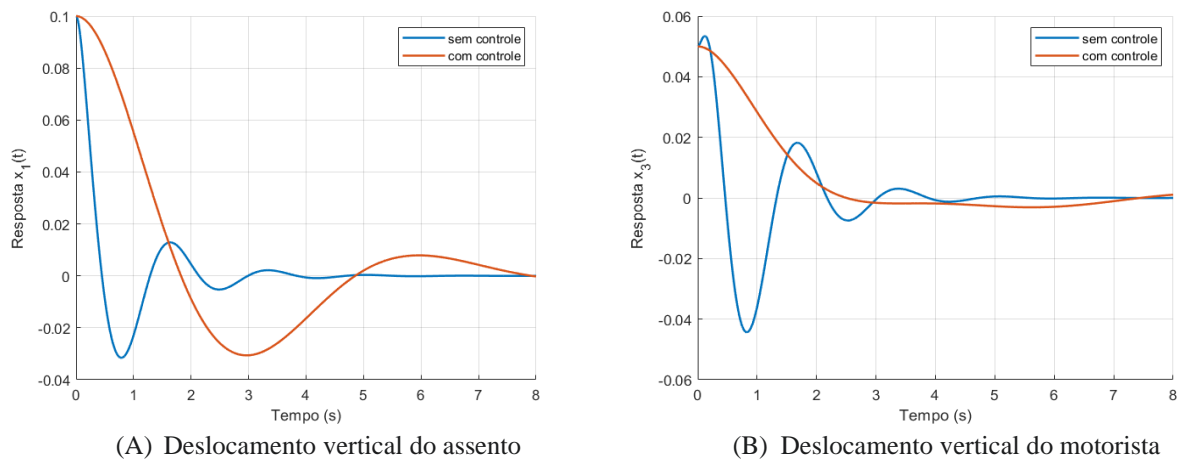
$$Y = \begin{bmatrix} -4143,8 & 1033,8 & 90 & 0 \\ 3112,5 & -316,2 & 3022,5 & 377,5 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -3799,1 & -347,4 & 90 & 30 \\ 3007,1 & 721,3 & -2896,7 & -630 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1,13 & -0,38 & 0 & 0 \\ -0,38 & 1,13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,13 & -0,38 \\ 0 & 0 & -0,38 & 1,13 \end{bmatrix}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O sistema (2) foi simulado considerando primeiro $u = 0$, sem ação de controle e, posteriormente, foram inseridos o controle com realimentação de estados. O valor dos parâmetros foram tomados de acordo com a Tabela 1, mais a condição inicial definida por $x(0) = [0,1 \ 0 \ 0,05 \ 0]^T$, e as matrizes apresentadas em (3). A Figura 2 ilustra os resultados obtidos, comparando a resposta no tempo das variáveis $x_1(t)$, deslocamento vertical do assento, e $x_3(t)$, deslocamento vertical do motorista. Em ambos os casos, verifica-se que a fase transiente do sistema, tempo de oscilação de resposta em relação ao deslocamento inicial, é similar. Contudo, para o sistema com ação de controle, verifica-se uma redução significativa na amplitude das oscilações no deslocamento vertical do motorista, o que indica um maior conforto para o usuário.

Figura 2: Simulação do sistema de suspensão de assento.



Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado um estudo de um sistema de suspensão de assento de veículo, onde duas entradas de controle são inseridas nos conjuntos mola amortecedor do modelo. Na análise de estabilidade e controle do sistema, foi utilizado o método indireto de Lyapunov, descrevendo as relações como desigualdades matriciais lineares. As soluções das LMIs foram implementadas em MATLAB com uso dos pacotes YALMIP e Sedumi. Os estudos e simulações realizadas comprovaram a estabilidade assintótica do sistema e, as ações de controle aplicadas, indicam uma redução nas amplitudes de oscilações verticais do motorista, aumentando assim o conforto do usuário na condução do veículo. Estudos futuros preveem a análise do sistema com atenuação de distúrbio, assim como, a adição de não linearidades do sistema e uso de técnicas de análise de sistema não lineares mediante modelagem Fuzzy Takagi-Sugeno.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de São Paulo (IFSP) pela bolsa concedida através do Programa de Apoio à Ciência e Tecnologia (PACTec) para a realização deste projeto de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Society for industrial and applied mathematics, 1994.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- ELIAS, L. J., et al. **Stability analysis of Takagi–Sugeno systems using a switched fuzzy Lyapunov function**. Information Sciences, 543, 43-57, 2021.
- KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **The theory of differential equations classical and qualitative**. 2. ed. New York: Springer, 2010
- KLUEVER, Craig A. **Sistemas dinâmicos/ modelagem, simulação e controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- LOFBERG, J. **YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB**. In: IEEE. 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, China, 2004. p. 284–289.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- NEGREIROS, V. I; ELIAS, L. J. **Controle do sistema de um pêndulo invertido utilizando modelagem Fuzzy TS**. VII Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica (EnICT), IFSP, *Campus Araraquara*, 2022.
- NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- STURM, J. F. **Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones**. Optimization Methods and Software, 11–12:625–653, 1999.