



IX Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica
IX EnICT
ISSN: 2526-6772
IFSP – Campus Araraquara
6 de dezembro de 2025



Análise de um sistema massa-mola amortecido com movimento horizontal e não linearidade na força restauradora da mola.

Alauhanya dos Santos De Miranda Cevada, Leandro J. Elias²

¹ Graduanda de Engenharia Mecânica, *Campus Araraquara* do IFSP, alauhanya.m@aluno.ifsp.br

² Doutor em Engenharia Elétrica, *Campus Araraquara* do IFSP, leandro.elias@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Sistemas Dinâmicos – 1.01.03.04-0

RESUMO: O presente trabalho é resultado de estudos realizados em um projeto de iniciação científica e apresenta a análise de um sistema mecânico translacional constituído por dois blocos horizontais conectados por um conjunto de molas e amortecedores. Não linearidades foram inseridas nas equações para aproximar o modelo do sistema físico, desse modo, a estabilidade do sistema é investigada mediante expansão em série de Taylor das equações do modelo próximas ao ponto de equilíbrio. Simulações numéricas em MATLAB são realizadas para ilustrar os resultados obtidos, assim como, para comparar as soluções numéricas do sistema não linear com o sistema linearizado.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diferenciais; Sistemas Não Lineares; Série de Taylor.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é derivado de estudos realizados em um projeto de iniciação científica, cuja proposta é a análise de sistemas mecânicos translacionais. Esses tipos de sistema são caracterizados por variáveis ou grandezas físicas cujos comportamentos envolvem, em geral, deslocamentos lineares, velocidades, acelerações e forças (Souza e Pinheiro, 2008). Os elementos mais comuns referentes a esses sistemas são massas, molas, amortecedores e atritos viscosos, sendo o estudo bastante explorado na área de análise e controle (Bassanezi, 2011; Dorf e Bishop, 2009; Geromel e Palhares, 2011; Kluever, 2018; Zill, 2016), com aplicações diversas em sistemas mecânicos, elétricos, entre outros.

Neste estudo é proposto uma análise de um sistema massa-mola com movimento horizontal, onde dois blocos são conectados por uma mola de constante elástica e, lateralmente, cada bloco é conectado a um ponto fixo por um conjunto formado por mola e amortecedor. Com a finalidade de aproximar o sistema físico do modelo, são inseridas não linearidades na força restauradora das molas fixas nas extremidades.

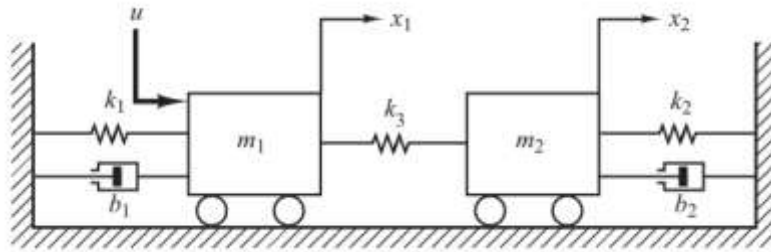
O objetivo do trabalho é realizar a análise do ponto (ou pontos) de equilíbrio do modelo. Para isto, a forma espaço de estados é utilizada na representação das equações de movimento (Boyce e DiPrima, 2015; Kelley e Peterson, 2010; Monteiro, 2011), é realizada a expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio, obtendo um sistema linear equivalente via matriz Jacobiana. A equivalência topológica do sistema não linear com o linearizado, próximo ao ponto de equilíbrio, permite investigar a estabilidade do sistema (Kelley e Peterson, 2010; Monteiro, 2011).

O trabalho está organizado com a apresentação desta breve introdução, seguido da apresentação do modelo e referenciais teóricos utilizados no estudo na seção de fundamentação teórica. Os conceitos teóricos são aplicados no modelo investigado na seção de metodologia. As simulações e decorrentes análises são apresentadas na seção de resultados e discussões, seguidos por uma breve conclusão.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Seja o sistema apresentado na Figura 1 (Ogata, 2010), constituído por dois blocos de massas m_1 e m_2 , respectivamente, que se movem de forma horizontal após um deslocamento inicial descrito por uma força u aplicada no primeiro bloco. As variáveis x_1 e x_2 são as funções de posição em relação ao tempo dos blocos 1 e 2, respectivamente. Os blocos são conectados por uma mola de constante elástica k_3 e, lateralmente, cada bloco é conectado a um ponto fixo por um conjunto formado por uma mola e um amortecedor, sendo o bloco 1 fixado à esquerda por uma mola de constante k_1 e um amortecedor com coeficiente de atrito b_1 , o bloco 2 à direita por uma mola de constante k_2 e um amortecedor com coeficiente de atrito b_2 .

FIGURA 1. Sistema com duas massas conectadas por amortecedores e molas.



Fonte: Ogata (2010).

As equações de movimento do sistema podem ser obtidas via análise do diagrama de forças em cada bloco, onde o sentido positivo é a favor do movimento (à direita), e considerando a segunda lei de Newton (Bassanezi, 2011; Geromel e Palhares, 2011; Kluever, 2018; Souza e Pinheiro, 2008). Além disso, os parâmetros das constantes elásticas da mola k_1 e k_2 serão tomados como uma função das variáveis de estado x_1 e x_2 , da mesma forma que foi apresentado em Elias, L. J. et al. (2022). Desse modo, são definidas as equações de movimento

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1(1 + a^2 x_1^2)x_1 - b_1 x_1' - k_3(x_1 - x_2) + u \\ m_2 x_2'' = -k_2(1 + a^2 x_2^2)x_2 - b_2 x_2' - k_3(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (1)$$

As equações de movimento são reescritas em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, necessário para a simulação do sistema em software e também para as análises realizadas neste trabalho (Boyce e DiPrima, 2015; Monteiro, 2011; Oliveira, Aguiar e Vargas, 2016). Para isto, são definidas as novas variáveis de estado $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$, e a forma espaço de estados é obtida

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k_1}{m_1}(1 + a^2 y_1^2)y_1 - \frac{b_1}{m_1}y_2 - \frac{k_3}{m_1}(y_1 - y_3) + \frac{u}{m_1} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -\frac{k_2}{m_2}(1 + a^2 y_3^2)y_3 - \frac{b_2}{m_2}y_4 - \frac{k_3}{m_2}(y_3 - y_1) \end{cases} \quad (2)$$

Na modelagem, u é considerada uma função de deslocamento horizontal do primeiro bloco. Desse modo, é definido

$$u = \begin{cases} \rho, & \text{se } t = 0 \\ \rho^*, & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde ρ e ρ^* são números reais e positivos.

O sistema (2) é não linear e para sua análise foi realizada a expansão em série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio do sistema, obtendo assim um sistema linear equivalente (Boyce e DiPrima, 2015; Kelley e Peterson, 2010; Monteiro, 2011). O ponto de equilíbrio do sistema é obtido por equações algébricas, ao se igualar a zero o lado direito de cada equação do sistema (2).

METODOLOGIA

Para análise e simulação do sistema, foram utilizados os valores dos parâmetros da Tabela 1.

TABELA 1. Valores dos Parâmetros do sistema

Parâmetro	Valor
k_1	5 N/m
k_2	5 N/m
k_3	5 N/m
b_1	6 s^{-1}
b_2	6 s^{-1}
m_1	2kg
m_2	4kg

Fonte: Autoria própria.

Para determinar o ponto de equilíbrio do sistema, o valor do deslocamento é tomado como $u = \rho^*$. Quando $\rho^* = 0$, o ponto de equilíbrio do sistema (2) é a origem. Neste trabalho, foi tomado $\rho^* = 0,05 \text{ m}$, considerando que o ponto de equilíbrio do sistema foi levemente deslocado. Isto pode representar uma leve distensão na mola com o passar do tempo ou até mesmo condições de temperatura extremas do ambiente. Assim, o ponto de equilíbrio foi obtido com o software Matlab, utilizando os valores de parâmetros da Tabela 1. O resultado obtido é $y^* = (0,0067 \ 0 \ 0,0033 \ 0)^T$.

Para a análise do ponto de equilíbrio y^* , foram definidas as funções

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 \\ f_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = -\frac{k_1}{m_1}(1 + a^2 y_1^2)y_1 - \frac{b_1}{m_1}y_2 - \frac{k_3}{m_1}(y_1 - y_3) + \frac{u}{m_1} \\ f_3(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_4 \\ f_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = -\frac{k_2}{m_2}(1 + a^2 y_3^2)y_3 - \frac{b_2}{m_2}y_4 - \frac{k_3}{m_2}(y_3 - y_1) \end{cases} \quad (4)$$

Derivando as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 em relação a cada variável de estado, tomando os valores do ponto de equilíbrio y^* e dos parâmetros da Tabela 1, é obtido o sistema linearizado

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5,0028 & -3 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1,25 & 0 & -2,5003 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

onde $z = (z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4)^T$ é a variável descolada, ou seja, $z = y - y^*$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

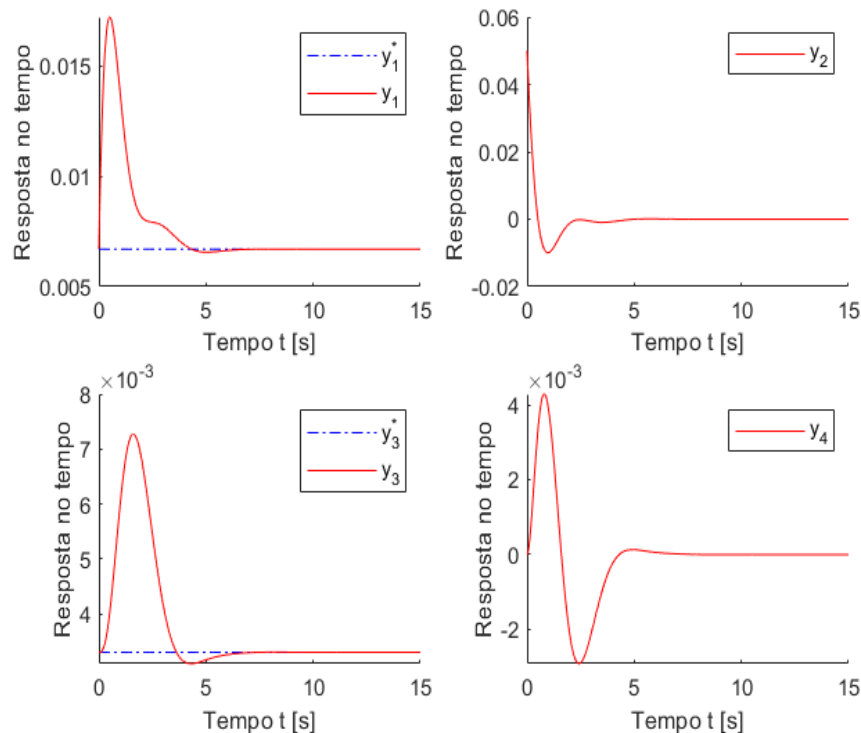
Os autovalores da matriz associada ao sistema (5) obtidos são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1,2312 + 1,9119i \\ \lambda_2 &= -1,2312 - 1,9119i \\ \lambda_3 &= -1,0188 + 0,8813i \\ \lambda_4 &= -1,0188 - 0,8813i \end{aligned} \quad (6)$$

e, como todos têm parte real negativa, o ponto de equilíbrio do sistema é estável.

A simulação do sistema (5) foi realizada com o software MATLAB, no tempo inicial $u = \rho$, onde $\rho = 0,01 \text{ m}$. A Figura 2 apresenta a resposta no tempo das variáveis de estado, onde $y = z + y^*$. Verifica-se que o sistema evolui para o ponto de equilíbrio y^* com o passar do tempo.

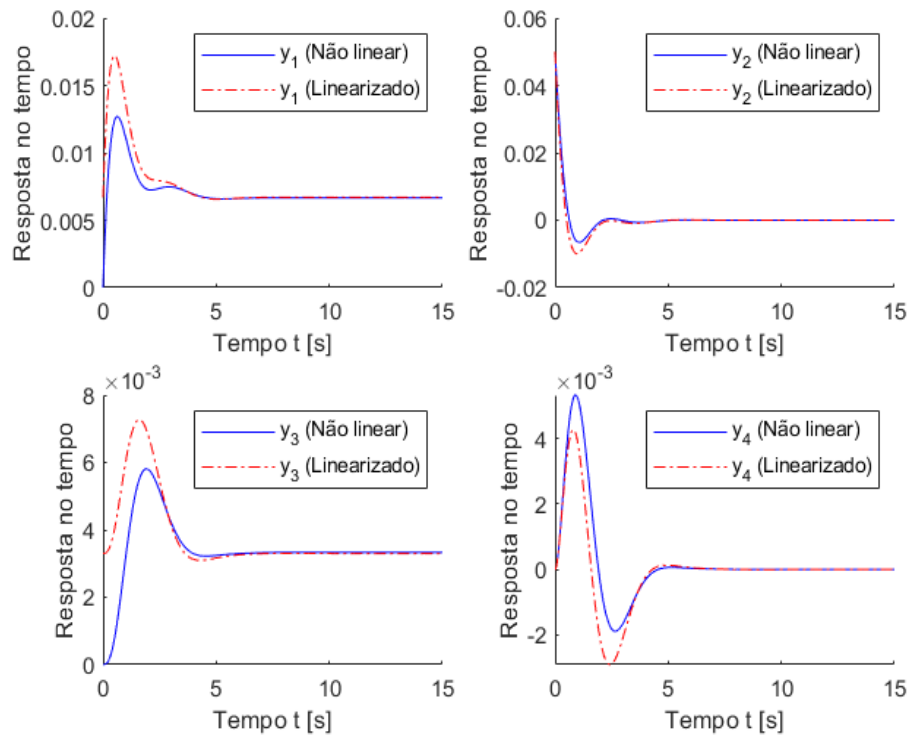
FIGURA 2. Resposta no tempo do sistema (5).



Fonte: Autoria própria.

A equivalência topológica do sistema linear aproximado (5) comparada com o sistema não linear (2) pode ser verificada na Figura 3. As trajetórias das variáveis de estado ficam equivalentes quando se aproximam do ponto de equilíbrio, como é previsto na literatura (Kelley e Peterson, 2010; Monteiro, 2011).

FIGURA 3. Comparação da resposta no tempo dos sistemas não linear (2) e linearizado (5).



Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado um estudo de um sistema massa-mola horizontal onde dois blocos são conectados por uma mola de constante elástica e, lateralmente, cada bloco é conectado a um ponto fixo por um conjunto formado por uma mola e um amortecedor. No modelo, foram tomadas as constantes elásticas das molas fixadas lateralmente aos blocos, como uma função não linear da posição, aproximando o modelo do sistema físico. Para encontrar o ponto de equilíbrio, as equações algébricas obtidas não admitiam uma solução trivial, sendo necessário o uso de software numérico. Para o estudo desse sistema foi necessário obter uma representação linearizada, utilizando o método de expansão de série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio do sistema. A análise realizada mostrou que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. As simulações numéricas em MATLAB do sistema ilustrou a evolução temporal do sistema, assim como, foi apresentada a comparação do sistema linear com o sistema linearizado, verificando-se a equivalência topológica entre eles, próximo ao ponto de equilíbrio.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o Campus Araraquara do IFSP pela oferta de bolsa PIBIFSP para a execução do projeto.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

ELIAS, L. J. et al. **Robust static output feedback H_∞ control for uncertain takagi-sugeno fuzzy systems**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, IEEE, 2022.

GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. G. B. **Análise linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2011.

KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **The theory of differential equations classical and qualitative**. 2. ed. New York: Springer, 2010.

KLUEVER, C. A. **Sistemas dinâmicos/ modelagem, simulação e controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

OLIVEIRA, V. A.; AGUIAR, M. L.; VARGAS, J. B. **Engenharia de controle fundamentos e aulas de laboratório**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.