TRANSFORMADA DE WALSH-HADAMARD PARA ENGENHEIROS COMO INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA DE FOURIER

Fabriciu Alarcão Veiga Benini
IFSP – Câmpus São Carlos
benini@ifsp.edu.br

Resumo:
A Transformada de Fourier (TF) é uma importante ferramenta para análise de sinais e de imagens, por isso é amplamente utilizada em problemas de Engenharia. Porém, aborda conceitos complexos que exigem um conhecimento teórico amplo de diversas áreas da matemática. Isso apresenta um obstáculo para o seu aprendizado confundindo o aluno no processo de abstração. O presente trabalho propõe utilizar a Transformada de Walsh-Hadamard (TWH) como introdução para facilitar o processo de aprendizado neste campo. A TWH possui as principais características e aplicações da TF sem a necessidade de se conhecer os pontos teóricos mais críticos. Sua principal característica baseia-se em somas e subtrações de números inteiros. Isso simplifica o processo de transformação facilitando ao aluno durante a avaliação dos resultados. Essa abordagem foi testada através de minicursos ministrados em eventos acadêmicos. Os resultados obtidos demonstraram sua eficácia principalmente na questão concernente ao processo de abstração em processamento de imagens. Ao final de cada minicurso os alunos demonstraram-se abertos e interessados para aprofundar o estudo nessa área.
Palavras-chave: Transformada de Fourier; Transformada de Walsh-Hadamard; Funções de Walsh; matriz de Hadamard; análise de sinais; processamento de imagem.

1. Introdução

A Transformada de Walsh-Hadamard (TWH) baseia-se em matrizes ortogonais. Estas matrizes são compostas exclusivamente por 1 e -1. Com isso, sua transformação se resume basicamente em somas e subtrações. Portanto, para matrizes de pequenas dimensões, possibilita realizar os cálculos manualmente. Dessa forma a demonstração de seus cálculos fica fácil de ser realizada em sala de aula, passo a passo.

Adicionalmente, essa característica se adequa facilmente à estrutura binária de funcionamento de um computador digital, por isso, é mais simples criar códigos envolvendo TWH. O auxílio de computadores para realizar experimentos com essa técnica pode potencializar demonstrações de resultados.

Apesar de tudo, não é encontrado na literatura nenhum estudo abordando questões didáticas através da TWH. Mais, ao analisar as ementas de cursos de graduação da área de exatas, verifica-se que raramente o conceito aqui abordado é citado. Embora existam inúmeros trabalhos que realizam comparações entre a Transformada de Fourier (TF) e a TWH (SOSA, 2016), (XU, 2016), (AHMED; RAO, 2012).

2. Revisão Bibliográfica

Matrizes de Hadamard (MH) (EULER et al., 2016) são ortogonais e podem ser constituídas pelas funções de Walsh (WALSH, 1923). Estas, como dito anteriormente, são compostas exclusivamente por 1 e -1. Cada função é definida em um intervalo aberto entre 0 e 1, [0,1), e amostrada de acordo com o número de funções utilizadas para formar uma MH. Estas matrizes são quadradas, de ordem N. Para formar um conjunto de N funções, é necessário que N seja potência de dois ($N = 2^n$).

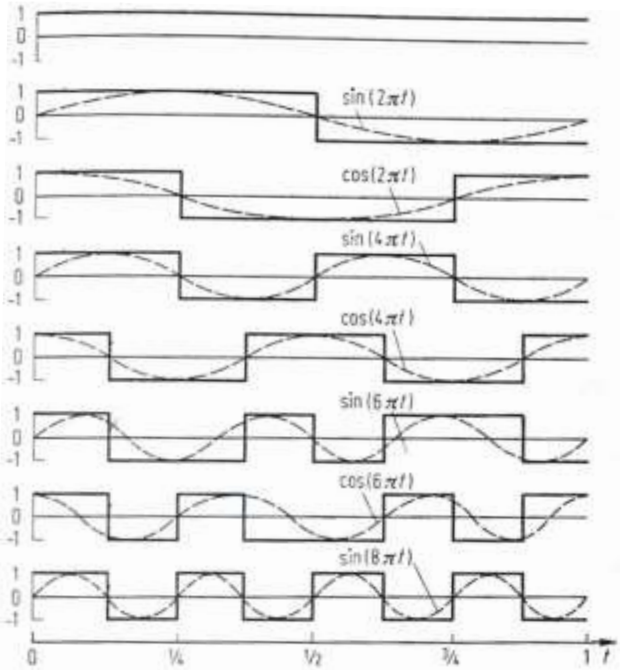

Figura 1 – As 8 primeiras funções de Walsh, aqui exibidos em traço contínuo. Elas são comparadas com as funções senoidais de Fourier, aqui ilustradas tracejadas. Fonte: (AHMED; RAO, 2012)

A MH resultante pode ser classificada com base em três configurações diferentes. Essas configurações se relacionam de acordo como as funções de Walsh são ordenadas. São três os tipos de ordenação. São elas a ordenação sequencial, diádica e natural (GEADAH; CORINTHIOS, 1977). Cada uma delas possuem características próprias de distribuição dos 1 e -1.

A ordenação sequencial possui uma distribuição bem similar às senóides de Fourier, conforme ilustrada na Figura 1, sendo a linha tracejada representando as senóides e a linha contínua as funções de Walsh. A ordenação diádica é apropriada para implementar algoritmos de análise de sinais devido ao agrupamento que ocorre entre os 1 e -1. Finalmente a ordenação natural, é a menos empregada, mas possui como vantagem a construção rápida de matrizes de Hadamard de ordem N através de um *template* iterativo utilizando o produto de Kronecker ($\otimes$), conforme Expressão 1.

$$\mathbf{H}_1 = [1], \qquad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_N = \mathbf{H}_{N/2} \otimes \mathbf{H}_2, \tag{1}$$

Dessa forma, através da matriz inicial de ordem 2, constrói-se a MH de ordenação natural até a ordem desejada. A seguir é ilustrada a construção progressiva até a ordem 8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \end{bmatrix},$$

sendo o sinal menos (-) representando -1 para efeito de simplificação visual.

Sendo assim, supondo uma função discreta que resulta em um vetor de tamanho N, definido aqui por f(x). A TWH de f(x) resulta em um vetor F(x), cujos valores possuem representações similares ao espectro de frequência de Fourier (GIBBS; PICHLER, 1971). Sendo x, para ambos vetores, igual a 0, 1, 2, ... , N-1. As Equações 2 e 3 representam a TWH e a Transformada Inversa de Walsh-Hadamard (TIWH), respectivamente.

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n).H_N(m,n). \tag{2}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m).H_N(n,m) \tag{3}$$

3. Metodologia

Para o minicurso foi preparado uma apresentação em *datashow*. Ele inicia-se com uma introdução teórica de 15 minutos sobre TWH. Nessa introdução, após o conceito envolvendo vetores unidimensionais, foi apresentado sua evolução para o plano espacial, em 2D. Assim o aluno consegue obter uma visualização dos resultados com aplicações em imagens. Em seguida iniciou-se a aplicação prática usando o MatLab.

Foram dois os eventos onde houve o minicurso. O primeiro em um tradicional evento anual denominado, EESC/USP - SICEEL Simpósio de Iniciação Científica da Engenharia Elétrica 2016, realizado para os alunos de engenharia elétrica da USP de São Carlos. Neste evento havia disponível um computador para cada dois alunos. No segundo, ocorreu durante a Semana Nacional da Ciência e Tecnologia 2016, realizado para alunos tecnólogos do IFSP no Câmpus São Carlos, como não haviam computadores disponíveis com MatLab, optou-se em montar apresentações com passo a passo na execução dos códigos.

Basicamente foi utilizada a conhecida imagem da Lena, aqui ilustrada na Figura 2 (a), para aplicar os algoritmos. Durante as oficinas, diversos tipos de filtros espaciais foram apresentados tais como filtro passa-baixa (compactação de imagem), ilustrado na Figura 2 (b), filtro passa-alta (gerador de borda), conforme Figura 2 (c) e filtro passa-banda (ajuste de imagem). Para cada filtro, foram propostas tarefas aos alunos para execução do algoritmo. Ao final da tarefa foi apresentado o resultado esperado para efeito de comparação.

(a) (b) (c)

Figura 2 – Imagem da Lena usado para aplicar os filtros baseados na TWH. (a) Original. (b) Redução de resolução para compactar imagem. (c) Borda extraída da imagem original.

4. Resultados Preliminares

A cada início de tarefa os modelos de funcionamento dos respectivos filtros foram apresentados em diagrama de blocos. Para os alunos da USP, todos os 40 alunos conseguiram construir o código baseado em TWH e executar com sucesso. Em relação aos 40 alunos do IFSP, orquestrado pelo docente, todos juntos montaram no quadro negro um algoritmo dos passos de execução. Durante a construção cada aluno teve que responder um ponto do algoritmo. Todos demonstraram ter entendido o princípio de funcionamento quando questionados individualmente.

Com as oficinas ficou demonstrado, através de perguntas, que o conceito ficou consolidado para os alunos. Através dessas perguntas foi possível observar que ficou esclarecido o conceito de espectro de frequência com a disposição dos harmônicos e suas contribuições na formação de uma imagem. O objetivo foi atingido em menos de 2 horas de aula.

5. Considerações Finais

Ao final do minicurso diversos alunos procuraram mais informações de como poderiam se aprofundar na área de processamento de imagem. O conceito teórico mais leve envolvendo TWH, possibilitou uma aula tranquila e uma porta de entrada para que cada um procurasse se aprofundar através de outros ferramentais matemáticos, principalmente a TF.

6. Referências

AHMED, N.; RAO, K. R.Orthogonal transforms for digital signal processing. [S.l.]: **SpringerScience & Business Media**, 2012.

EULER, Reinhardt; GALLARDO, Luis H.; RAHAVANDRAINY, Olivier. Combinatorial properties of circulant Hadamard matrices. **A Panorama of Mathematics: Pure and Applied**, v. 658, p. 9, 2016.

GEADAH, Y. A., & CORINTHIOS, M. J. G. (1977). Natural, Dyadic, and Sequency Order Algorithms and Processors for the Walsh-Hadamard Transform. **IEEE Transactions on Computers**, C-26(5), 435–442. <http://doi.org/10.1109/TC.1977.1674860>.

GIBBS, J. E.; PICHLER, F. R. Comments on transformation of "fourier"power spectra into"walsh"power spectra.**IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, EMC-13, n. 3,p. 51–54, Aug 1971. ISSN 0018-9375.

SOSA, Pedro Miguel. Calculating Nonlinearity of Boolean Functions with Walsh-Hadamard Transform. 2016.

WALSH, J. L. A closed set of normal orthogonal functions.**American Journal of Mathematics,JSTOR**, v. 45, n. 1, p. 5–24, 1923.

XU, Guoqing. Sequency-ordered generalized Walsh-Fourier Transform based shape description and retrieval. In: **Audio, Language and Image Processing (ICALIP), 2016 International Conference on**. IEEE, 2016. p. 323-326.